



Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* - Mestrado Profissional em Ensino de Ciências

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Mestranda: Gislaíne Maria Ferreira Matos

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mirley Luciene Dos Santos

Anápolis – GO

AGOSTO, 2017

**MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E
APRENDIZAGEM EM AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO**

GISLAINE MARIA FERREIRA MATOS

Orientadora: PROF^a. DR^a. MIRLEY LUCIENE DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* – Nível Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, da Universidade Estadual de Goiás para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências

Orientador(a): Prof(a) Dr(a) Mirley Luciene dos Santos

Anápolis

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matos, Gislaine Maria Ferreira
Modelagem Matemática como estratégia de ensino e
aprendizagem em aulas de matemática no Ensino Médio – Anápolis,
2017.

97 f.: figs, tabs.

Orientadora: Prof. Dr. Mirley Luciene dos Santos
(Mestrado) – Universidade Estadual de Goiás, Campus de
Ciências Exatas e Tecnológicas, 2017.

1. Educação Matemática 2. Problematização 4. Investigação
Matemática. Modelagem Matemática como estratégia de ensino e
aprendizagem em aulas de matemática no Ensino Médio.

Dedico à minha pequena Lorena.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciência, pela liberdade de seguir com meu projeto de pesquisa;

À minha professora e orientadora Mirley, em especial, pela abertura e carinho que aceitou me orientar e por conduzir minha formação de forma tão humana e compreensiva;

À Karly pelo agradável reencontro e continuação de nosso trabalho e pelo cuidado e companheirismo de sempre;

Ao Roberto pelo constante carinho e amizade e pelas ajudas desinteressadas no início da pesquisa;

Aos membros da banca (Karly, Roberto e Héliida) pelo carinho com que sempre avaliaram meu trabalho e pelas ricas contribuições;

Aos meus queridos alunos que aceitaram o desafio de participar de atividades tão exigentes e desafiantes como são as de Modelagem Matemática e pelo carinho de sempre;

Aos meus pais por todo incentivo, apoio e disposição constante em me ajudar;

A minha querida irmã pelo exemplo de trabalho e por me ensinar a ter coragem para enfrentar o medo e as adversidades;

Ao meu amado esposo por toda a compreensão e por me ajudar a ter ideias claras;

À todos que de alguma forma me ajudaram na realização da pesquisa.

“Isto é aprendizagem por excelência. A capacidade de explicar, apreender e compreender, de enfrentar criticamente situações novas. Não o mero domínio de técnica ou a memorização de algumas explicações e teorias”.

Ubiratan D'Ambrósio

1. Introdução Geral.....	12
1.1. Apresentação.....	12
1.2. Trajetória Pessoal.....	13
1.3. Introdução ao Tema	15
1.4. Questões Básicas da Pesquisa.....	17
1.5. Objetivos.....	17
Objetivo Geral.....	17
Objetivos Específicos.....	17
1.6. Estrutura da Pesquisa e o Produto	18
1.7. Referencial Teórico	18
1.7.1. A Modelagem Matemática como uma Estratégia de Investigação e Pesquisa na Educação Matemática	21
1.7.2. As Etapas da Modelagem Matemática no Ambiente Escolar	23
1.8. Metodologia.....	25
1.8.1. Os sujeitos da Pesquisa	27
1.8.2. O Desenvolvimento das atividades	28
1.8.3. Atividade 1: Investigação sobre redução do volume de lixo	29
1.8.4. Atividade 2: Montando um prato com Números	29
1.8.5. Atividade 3: Conhecendo uma Trilha Ecológica por meio da Trigonometria	30
1.8.6. A Coleta e análise dos dados	31
1.9. Referências:	31
2. Aplicação da Primeira Atividade de Modelagem Matemática.....	34
2.1. Modelagem matemática em atividades sobre a temática do lixo: relações com a aprendizagem significativa crítica.....	34
2.2. Introdução	35
2.3. A Modelagem Matemática e a Aprendizagem Significativa Crítica	36
2.4. Aplicação e avaliação da proposta: Modelagem Matemática na 1ª série do Ensino Médio	38
2.5. Considerações finais	49
2.6. Referências	49
3. Aplicação da segunda atividade de modelagem matemática	51
3.1. Modelagem matemática em uma atividade de investigativa em trilha ecológica	51
3.2. Introdução	52

3.3. A Modelagem Matemática como Ambiente de Pesquisa e Investigação no Ensino de Matemática.....	53
3.4. Descrição e Avaliação da Atividade de Modelagem Matemática	55
3.4.1. 1ª Parte: Problematização e a elaboração dos instrumentos de coleta de dados	55
3.4.2. 2ª Parte: A Pesquisa e Coleta de Dados	58
3.4.3. 3ª Parte: Exploração dos dados e resolução do problema.....	60
3.4.4. 4ª Parte: A construção das maquetes e apresentações do trabalho	62
3.5. Considerações finais	65
3.6. Referências	66
4. Considerações Finais da pesquisa	68
5. Apêndice.....	72

Resumo: A presente pesquisa objetivou investigar e elaborar propostas de aplicação da Modelagem Matemática como facilitadora da aprendizagem, utilizando para tanto as aulas de Matemática Aplicada. A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa com alunos do Ensino Médio da rede pública de ensino. As atividades elaboradas, segundo a perspectiva da Modelagem Matemática, envolveram temáticas interdisciplinares pertencentes ao cotidiano dos alunos e nessas atividades, tivemos a preocupação de gerar um espaço para promover o diálogo, a pesquisa, a investigação bem como desenvolver o aprendizado em matemática. As aplicações nas turmas escolhidas tiveram como foco observar como ocorre a participação dos alunos nas atividades de Modelagem Matemática e quais as suas contribuições para o ensino e aprendizagem. Observamos que a problematização com situações próximas a realidade dos alunos, conduzida segundo a proposta da modelagem, possibilita o despertar do interesse nos alunos em aprender matemática e inspira reflexões de cunho social e ambiental, contribuindo com a formação para um pensamento sócio crítico.

Palavras Chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Problematização, Investigação Matemática.

Abstract: The present research aimed to investigate and elaborate proposals for the application of Mathematical Modeling as a facilitator of learning, using for this Applied Mathematics classes. The research was developed through a qualitative approach with High School students of the public school system. The activities elaborated, according to the Mathematical Modeling perspective, involved interdisciplinary themes that belong to students' daily life and in those activities, we had the concern of generating a space to promote dialogue, research skills, and investigation skills as well as to develop learning in mathematics. The applications in the chosen classes had as focus to observe the students' participation in the activities of Mathematical Modeling and the contributions of this activities to the teaching and learning. We observe that the problematization with situations close to the reality of the students, conducted according to the modeling proposal, makes it possible to awaken students' interest in learning mathematics and inspires social and environmental reflections, contributing to the formation of a critical social thinking.

Keywords: Mathematics Education, Mathematical Modeling, Problematization, Mathematical Research.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ambientes de Aprendizagem.	20
Figura 2 – Fases da Modelagem	24
Figura 3 – Alunos do Ensino Médio em Visita a Trilha do Tatu, localizada na Universidade Estadual de Goiás, Campus de Ciências Exatas e Tecnológicas, Anápolis/GO.....	30
Figura 4 – Copo deitado e seção longitudinal do copo.....	41
Figura 5 – Coletor de copos descartáveis	42
Figura 6 – Cálculos do Grupo 1, demonstrando o uso da regra de três para chegar ao resultado	43
Figura 7 – Cálculos do Grupo 2, demonstrando o uso da regra de três para chegar ao resultado.	43
Figura 8 – Cálculos do grupo 1, representando como chegaram ao resultado.	44
Figura 9 – Cálculos do grupo 2, representando como chegaram ao resultado.	45
Figura 10 – Fases da Modelagem	54
Figura 11 – Teodolito caseiro construído pelos alunos	57
Figura 12 – Aplicações das relações trigonométricas	57
Figura 13 – Miniaula no laboratório de Biodiversidade do Cerrado - UEG	58
Figura 14 – Visita à Trilha do Tatu e coleta dos dados	59
Figura 15 – Usando o teodolito e fita métrica para coletar dados	59
Figura 16 – Registro dos dados no diário de bordo	60
Figura 17 – Planejamento da construção da maquete a partir dos dados coletados!.....	61
Figura 18 – Utilizando a tangente para calcular a altura de uma placa	61
Figura 19 – Maquete pronta.....	63
Figura 20 – Exposição das Maquetes no Laboratório de Biodiversidade - UEG.....	64

1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1. Apresentação

A motivação para fazer essa pesquisa começou em 2009, assim que entrei na rede pública de Educação atuando no Ensino Médio. Terminei minha licenciatura em 2007, mas minha formação para atuar em sala de aula havia sido deficiente e também o próprio sistema educacional do estado não dispunha de suporte pedagógico para os professores iniciantes.

Comecei a trabalhar no sistema de aulas expositivas, utilizando como material apenas o livro didático. Era o que eu concebia como processo de ensino e de aprendizagem e me esforçava, mesmo com esse tradicional método, em ajudar cada aluno em suas dificuldades. No entanto, via que por mais que me esforçasse em garantir a aprendizagem deles, faltava muito para alcançá-la de fato.

Buscava nos livros didáticos, aqueles em que os autores apresentavam como introdução das sessões, curiosidades ou aplicações do conteúdo, como uma motivação para aprender tal conhecimento matemático. Utilizava essas introduções dos capítulos para justificar o que iria trabalhar com os alunos, num diálogo rápido nas primeiras aulas do conteúdo. Mas essa prática não passava de uma aula interessante para os alunos, que seguiam ao longo do bimestre engolindo definições, teoremas e se esforçando para decorar o método de resolver os problemas.

Meu desejo foi sempre o de apresentar aos meus alunos a matemática como uma construção de conhecimento que tem seu valor nas diversas áreas da vida cotidiana ou quando não é aplicável, é significativo e importante de ser aprendido. Mas me frustrava porque somente essa intenção não era suficiente para levar os alunos a encarar a matemática dessa forma. Eu alcançava uma minoria na sala que já trazia um encanto pelos números, mas não transformava a visão da maioria, de que estudar matemática era chato e desnecessário.

Passei então a pesquisar materiais didáticos e estratégias de ensino e aprendizagem que pudessem servir de suporte para as minhas buscas pedagógicas. Mas, assim como para os alunos era difícil aprender sem uma condução eficaz, também era difícil me capacitar sozinha em tais recursos porque não basta ter um modelo de aula interessante, é preciso saber utilizá-lo e adequá-lo à sua realidade.

Procurei me capacitar melhor na área de ensino e me inscrevi numa especialização em Ensino de Matemática, em 2012. Foi nessa oportunidade que conheci, por meio de uma professora de Práticas de Ensino, a coleção M3 Matemática Multimídia. Um material desenvolvido pela Unicamp para ensinar Matemática para o Ensino Médio no Brasil, disponibilizado através de um portal com mais de 350 recursos educacionais no formato de

vídeos, áudios, softwares e experimentos (disponível na URL: <http://m3.ime.unicamp.br/>; acesso em 2017).

Esta coleção aborda os conteúdos de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções, contextualizações e jogos. Aprendi a utilizar os vídeos e os experimentos nas minhas aulas, sentindo com muita empolgação que tinha resolvido todo o problema de falta de recursos. Mas com o tempo fui percebendo que os temas de alguns vídeos eram distantes da realidade dos meus alunos e alguns experimentos também não eram aplicáveis em algumas turmas.

Outro excelente recurso que conheci nesse período foi um livro didático de Matemática para o Ensino Médio, desenvolvido e utilizado no estado do Paraná em 2006. Os conteúdos nesse livro são desenvolvidos a partir de temas interdisciplinares, do cotidiano dos alunos e muitos deles atrativos para os adolescentes. Ao estudar Modelagem Matemática, encontrei por acaso na internet e fiquei muito surpresa, pois o livro reunia uma diversidade relevante de temas exigidos no currículo da disciplina Matemática Aplicada (disponível na URL: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf; acesso em 2017)

Inspirada nesses dois ricos materiais que conheci e também seguindo com um desejo antigo de ensinar matemática de forma atrativa, comecei a sonhar em fazer um material didático com todo o conteúdo do Ensino Médio, apresentando aos alunos não temas isolados e descontextualizados, mas sim transdisciplinares e que justificassem o aprendizado matemático.

Nos meus estudos de formação seguintes, procurei conhecer um pouco mais sobre a Modelagem Matemática e essa aproximação acrescida ao meu sonho de montar um material de apoio didático foram as sementes que culminaram nesta pesquisa.

1.2. Trajetória Pessoal

Desde a infância me interessei muito por conversar com todos, ouvir os mais velhos e interagir com as crianças mais novas. Fui crescendo e meus desejos de “ser quando crescer” se relacionavam sempre com as áreas de Comunicação ou Educação. Aos doze anos comecei a dar aulas particulares na minha casa para seis crianças, as brincadeiras de ser professora já começavam a se tornar coisa séria com direito a salário e tudo.

Sempre busquei compreender o sentido a fundo das coisas e ensinava com esse intuito de esclarecer da melhor maneira possível os temas a serem aprendidos. Isso levou-me a me apaixonar pela Filosofia e pela Matemática já na adolescência. Os excelentes professores que tive dessas disciplinas foram me ensinando a gostar delas, mas foi a capacidade que essas

disciplinas têm de fazer-nos chegar ao conhecimento, a partir de nossas próprias reflexões e raciocínios, que levou a me interessar por elas.

Da mesma forma que organizava meu raciocínio para aprender buscando compreender os porquês e as relações entre as coisas, ensinava dialogando com os alunos sobre o sentido daquele conteúdo, levando-os a desenvolver a noção intuitiva dos assuntos e a perceber as aplicações deles em alguma área da vida prática. Eu ensinava dessa forma não por ter passado por uma licenciatura que me desse os parâmetros de uma boa metodologia de ensino, mas porque não concebia outra maneira dos alunos aprenderem que não fosse descobrindo sentido no que estavam aprendendo e construir aquele conhecimento.

É claro que esse instinto ou noção de como ensinar era insuficiente. Ele era apenas uma predisposição para o ensino de Matemática. Minha graduação possibilitou descobrir parte da Matemática, suas definições, teoremas e raciocínios tão elegantemente elaborados. A Matemática, com sua construção própria de conhecimentos, contribuiu para minha formação pedagógica, ajudando-me a aprender a aprender, e esse aprendizado me possibilitava ensinar aos alunos a aprender.

Matemática vem da palavra grega *Matemathike*; *Mathema* significa compreensão, conhecimento, aprendizagem, e *Thike* significa arte (HOUAISS; VILLAR, 2009). Portanto, o significado etimológico de Matemática é a arte de compreender, de entender. E considero que realmente o conhecimento matemático possibilita o desenvolvimento cognitivo com maestria.

Em 2012 fiz uma disciplina no Mestrado em Educação em Ciências e Matemática e na primeira aula discutimos sobre a necessidade de que os alunos se apropriassem do conhecimento aprendido, que esse, portanto, fizesse sentido para suas vidas. Na minha consciência veio imediatamente a aula que havia ministrado no período matutino. Havia trabalhado com meus alunos um conteúdo que normalmente não contextualizamos e que apresenta várias técnicas de resolução sem explicação prévia, num incentivo a decorar realmente as fórmulas. O que senti naquele momento de tomada de consciência, foi que estava fazendo mal aos meus alunos e que precisava superar o modelo tradicional de ensino e ousar pôr em prática o que acreditava como ideal para a educação.

Os diálogos seguintes das aulas da disciplina, que se chamava Conhecimento e Diversidade Cultural, foram sinalizando caminhos para superar algumas dificuldades de melhorar minha prática. Começava assim uma mudança ideológica que foi se associando a mudanças reais na minha conduta profissional. O que lia de Mário Sérgio Cortella, Paulo Freire, Edgar Morin, Pedro Demo, entre outros, não me permitia passar conteúdos aos alunos, sem ao

menos tentar justificar de alguma maneira sua finalidade, para que eles se sentissem confortáveis ao aprender.

Mas me deparei com muita dificuldade para mudanças, porque não basta boa intenção, é preciso muito estudo, pesquisa, apoio e adaptação. Em 2015 iniciei o mestrado profissional em Ensino de Ciências, meu sonho antigo inspirou meu projeto de pesquisa e comecei a ter o suporte efetivo para realizá-lo.

A disciplina Fundamentos Teórico-práticos para o Desenvolvimento de Recursos Didáticos, que fiz assim que entrei no programa do mestrado, me atraiu já pelo nome. Com o objetivo de analisar e elaborar recursos tais como livros, atividades, materiais de natureza experimental, estratégias e mídias para o ensino de Ciências, essa disciplina foi a que me direcionou ao trabalho de criação do produto educacional que é uma exigência do programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* – Mestrado Profissional em Ensino de Ciências.

Criar o produto educacional foi a oportunidade objetiva de realizar meu desejo de fazer um material para as aulas de matemática do Ensino Médio. Naturalmente, esse é o início de um longo caminho de pesquisa, compreensão da realidade educacional e de elaboração de propostas. Espero que esse primeiro passo, concretizado na proposta que aqui apresento, seja útil para outros idealistas da educação.

1.3. Introdução ao Tema

O atual contexto da maioria das escolas de Ensino Médio se encontra em aulas expositivas com o objetivo de preparar os alunos para saírem bem no ENEM e para passarem no vestibular. A relação que se estabelece com o conhecimento passa em grande parte pela busca de memorizar o maior número de informações, técnicas e regras. O sistema educacional normalmente impõe o conteúdo como necessário para passar nos exames e os alunos recebem de forma passiva, sem questionar ou participar de forma efetiva do processo da aprendizagem (FERREIRA, 2003).

Mais especificamente para a disciplina de Matemática, o modelo tradicional das aulas segue o esquema de exposição apresentando as ideias e os exemplos, seguido de exercícios, muitas vezes semelhantes aos resolvidos pelo professor. A esse método de ensino, Skovsmose (2000) atribui o nome de *paradigma do exercício*. O autor lembra ainda que nessas condições, o livro didático é o que dá as diretrizes da aula. Dessa forma, a relevância dos exercícios não é escolha dos professores e alunos, e além do mais, só é válida uma única resposta.

O objetivo desse trabalho centraliza na vontade de refletir sobre as possibilidades de mudança dessa realidade, ou seja, buscar alternativas de superar o *paradigma do exercício*. A

resolução de exercícios com certeza pode ser uma estratégia para os alunos fixarem o conhecimento que foi desenvolvido, no entanto, acreditamos que essa não deveria ser a única alternativa metodológica.

Skovsmose (2000) propõe uma abordagem investigativa como alternativa para contrapor o *paradigma do exercício*. Muitas são as formas de criar um espaço para a investigação, o autor sugere trabalhar com projetos visando levar os alunos a produzirem significado para os conceitos e para as atividades matemáticas.

No entanto, levar essas metodologias para a sala de aula não parece tão simples. O excesso de conteúdos estabelecidos como currículo mínimo e determinado pelas secretarias de educação e a forma como são abordados nos livros didáticos são alguns dos problemas que dificultam a aplicação de metodologias discutidas em Educação Matemática (BARBOSA, 2001).

Em 2014, a Secretaria de Educação do estado de Goiás, inseriu no currículo do ensino médio uma disciplina chamada Matemática Aplicada com uma aula por semana, passando então de quatro para cinco as aulas de matemática. A disciplina tem como base um material pedagógico mandado mensalmente pela secretaria, que se constitui apenas de uma lista de atividades de resolução de itens. Porém, os professores têm autonomia para utilizar outros recursos e metodologias para essas aulas.

Essa disciplina, com a característica de não ter um currículo mínimo, um livro didático e todas as exigências que muitas vezes não permitem que os professores trabalhem com novas metodologias, pode ser um espaço propício para colocar em prática algumas das propostas das pesquisas em Educação Matemática.

Em resposta à essa necessária mudança no ensino de Matemática, principalmente no que tange a sua prática na sala de aula, essa pesquisa teve como pretensão investigar e elaborar uma proposta de aplicação da Modelagem Matemática como facilitadora da aprendizagem matemática, utilizando para tanto, as aulas de Matemática Aplicada recentemente incluídas no ensino médio do Estado de Goiás.

Portanto, a escolha da Modelagem Matemática como recurso educativo, se deu por acreditar na sua capacidade de criar um espaço para a investigação e construção do conhecimento matemático através da pesquisa, de proporcionar um espaço de reflexões sobre a realidade e de possibilitar uma maior interação entre os alunos e entre o professor e os alunos.

1.4. Questões Básicas da Pesquisa

Diante o meu desejo em pesquisar uma estratégia de ensino e aprendizagem capaz de superar o *paradigma do exercício*, na busca por metodologias investigativas que ajudem os alunos e os professores a trabalharem os conteúdos de matemática, a partir de seu significado para a vida, surge as seguintes perguntas norteadoras:

Como trabalhar com projetos relacionados aos conteúdos curriculares da segunda série do Ensino Médio, a partir da perspectiva da Modelagem Matemática?

Como a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, contribui para a formação matemática e cidadã dos estudantes da segunda série do Ensino Médio?

1.5. Objetivos

Objetivo Geral

Investigar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem para aulas de matemática no Ensino Médio, verificando suas potencialidades na formação dos estudantes e elaborar um material pedagógico com modelos de atividades investigativas acerca do cotidiano dos alunos e da realidade que o cerca.

Objetivos Específicos

- Levantar situações próprias da realidade espaço-temporais dos alunos, propícias a investigação de modelos matemáticos contidos na natureza, nos fenômenos naturais, nos seres vivos, nas artes manuais e nos produtos visuais e tecnológicos atuais.
- Elaborar pequenos projetos de ação que serão utilizados em aulas práticas dentro da perspectiva da Modelagem Matemática.
- Aplicar os projetos nas aulas regulares de matemática.
- Verificar a aplicabilidade da metodologia e os efeitos do trabalho realizado, enquanto contribuição no processo de aprendizagem dos alunos e também quanto ao aperfeiçoamento pedagógico dos professores envolvidos.
- Reunir as estratégias elaboradas, num material de apoio às aulas, como um guia para atividades de Modelagem Matemática para o Ensino Médio.

1.6. Estrutura da Pesquisa e o Produto

Tendo escolhido escrever a dissertação em forma de artigos, este texto foi organizado em três partes.

A primeira parte, em que se encontra esta sessão, constitui-se por uma introdução geral contendo uma apresentação onde descrevo a motivação para a pesquisa, considerando minha trajetória formativa e profissional. Faço uma introdução ao tema situando-o brevemente na literatura, especifico as questões da pesquisa e os objetivos. Essa primeira parte apresenta ainda um referencial teórico geral, já que outros referenciais mais específicos constam nos artigos. Possui também, uma metodologia geral com descrição breve dos procedimentos da pesquisa, já que o detalhamento dos mesmos, constam nos capítulos seguintes que são os artigos sobre a pesquisa com a aplicação da Modelagem. Apresento os sujeitos da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados.

Na segunda parte apresento o artigo “Modelagem Matemática em atividades sobre a temática do lixo: relações com Aprendizagem Significativa Crítica”, nele faço uma revisão de literatura sobre a Modelagem Matemática e sobre a Aprendizagem Significativa Crítica e descrevo a primeira aplicação da Modelagem, como metodologia de ensino e aprendizagem, na turma escolhida, bem como discuto os resultados observados.

Na terceira parte apresento o artigo “Modelagem Matemática: uma atividade investigativa em trilha ecológica” onde abordo a Modelagem como ferramenta de estudo e reflexão de situações da realidade dos alunos em ambientes naturais. Relaciono a Modelagem com a Investigação Matemática numa proposta de aprendizagem a partir da pesquisa.

Na sequência, apresento as considerações finais da pesquisa.

Finalmente, apresento o produto educacional, uma vez que se trata de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências. O produto educacional apresenta-se como um material de apoio pedagógico com orientações de aplicação da Modelagem Matemática para professores do Ensino Médio e como guia de atividades práticas.

1.7. Referencial Teórico

Cortella (1999), considerando que todo conhecimento origina-se do que fazemos, defende que na escola em todo e qualquer nível, o conhecimento deve ser tratado como uma construção e não apenas uma descoberta. Assim, ele pode e deve ser feito por meio das situações reais da vida dos alunos ou pelo menos, partindo dos conhecimentos prévios que estes carregam. O professor irá intermediar o processo por meio da contextualização, inserindo os temas de valor significativo e situando-os dentro da realidade do aluno.

Tratando-se do ensino médio em específico, o autor ressalta que se a escola não considerar em suas proposições curriculares, as preocupações que os jovens têm, o pretendido aprendizado não passará de uma memorização sem sentido. Não há conhecimento sem preocupação, precisamos ouvir as inquietações que nossos estudantes trazem, deixar que os objetos de estudo façam parte da realidade deles (CORTELA, 1999).

As orientações para o Ensino Médio discutem sobre os jovens, sujeitos desse nível de ensino, lembrando que uma característica própria da faixa etária é a busca pela conquista da autonomia. A escola deveria proporcionar um ambiente de participação ativa dos alunos e de trabalho criativo e autônomo, respeitando a diversidade dos mesmos. Superar a triste realidade de impor um currículo distante dos interesses dos jovens é o desafio para construir uma escola mais atrativa e mais formativa (BRASIL, 2013).

Embora vários documentos nacionais da educação orientem para uma formação dos indivíduos, partindo de sua realidade e tratando o desenvolvimento do conhecimento em situações reais, não é isso que se vê nas escolas. O livro didático, as exigências de currículo e as avaliações externas norteiam a prática da sala de aula para um formato de imposição de conteúdos excessivamente técnicos e na maioria das vezes sem ligação com a vida dos alunos.

A perspectiva dialógica Freiriana denuncia essa tendência da educação. Nesse modelo didático, em quem o sujeito é o educador e os educandos apenas receptáculos de informações, a educação se transforma em ato de depositar e por isso Freire (1987) a caracteriza como *educação bancária*.

Acreditando na superação desse modelo opressor da educação, Freire (1987) defende a *dialogicidade*. O diálogo como prática educativa que confia e valoriza a capacidade criativa das pessoas, caracterizando o que ele chamou de *educação dialógica*. Nessa proposta, o conteúdo não é depositado, mas se organiza de acordo com a visão de mundo dos educandos e encontra nesse contexto os seus *temas geradores*.

É dentro dessa perspectiva Freiriana que Skovsmose (2000) refletindo sobre a realidade escolar, especificamente para a disciplina de matemática, propõe o *cenário da investigação* para contrapor o *paradigma do exercício*.

O meu interesse numa abordagem de investigação tem relação com a educação matemática crítica, a qual pode ser caracterizada em termos de diferentes preocupações. Uma delas é o desenvolvimento da matemática, vista como uma competência similar à literacia caracterizada por Freire (...) A educação matemática crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (...) é um tópico sobre o qual é preciso refletir (SKOVSMOSE 2000, p. 67).

O autor classifica seis possíveis ambientes de aprendizagem, gerados a partir das referências que se pode assumir quanto à matemática e segundo dois modelos de práticas de sala de aula, conforme Figura 1.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 1 – Ambientes de Aprendizagem.

Fonte: Skovsmose (2000)

O modelo tradicional das aulas de matemática, conduzidas pelo livro didático, é marcado pelos ambientes 1 e 3 dessa classificação porque mesmo quando os exercícios estão em forma de problemas, esses se enquadram dentro de uma semi-realidade, ou seja, não condizem com situações reais e muito menos com o cotidiano dos alunos. Gerar as condições para os ambientes 4, 5 e 6 é um desafio para o professor e para a escola porque exigem pesquisa, criatividade e espaço para o diálogo. É também desafiante para os alunos que serão chamados a participar de forma ativa e reflexiva.

No entanto, essa mudança na educação matemática é possível. D'Ambrósio (2012) mostra que, facilmente o professor de matemática, encontrará novas formas para a sua prática, enveredando-se pela via dos projetos. O autor ressalta que isso não exclui a necessidade de aulas expositivas que são válidas para todos os níveis de escolaridade. Skovsmose (2000) também enfatiza que uma aula de resolução de exercícios pode ter seu valor, como momento de fixação das ideias trabalhadas nas aulas investigativas. Por conseguinte, não trata de abandonar essas práticas tradicionais, mas conjugá-las de forma a envolver os alunos numa participação ativa e reflexiva.

D'Ambrósio (2012), atesta que uma notável maneira de utilizar-se de projetos é por meio de modelos matemáticos. Ele afirma que quase tudo presente na realidade dá a oportunidade de ser tratado dentro dessa perspectiva. E para ilustrar aplicações possíveis, cita exemplos associados a natureza, a arte e as situações do cotidiano dos alunos, como investigar relações de medidas no corpo humano, mapear o caminho percorrido da casa para a escola, etc.

Nesse contexto, Meyer *et al.* (2013) afirmam que a Matemática, para os nossos alunos, precisa ser encarada como um meio de avaliação do mundo, um meio de ler e entender a realidade. Apresentam, portanto, a Modelagem Matemática como ferramenta de muita competência em aprendizagem da vida.

1.7.1. A Modelagem Matemática como uma Estratégia de Investigação e Pesquisa na Educação Matemática

Movimento com mais de três décadas, a Modelagem Matemática possui um valor significativo para a educação brasileira. Dentre os precursores da Modelagem destaca-se Rodney Carlos Bassanezi, que provavelmente teve como motivação para defendê-la como estratégia de ensino, a busca por dar respostas ao *para que* aprender matemática? (BIEMBENGUT, 2009).

Bassanezi (2002) define a Modelagem, como a arte de transformar as situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. Nessa definição é possível notar como a Modelagem pode contribuir para fazer do ensino de matemática algo que ultrapasse o aspecto teórico formal. Isso porque se for utilizada no âmbito escolar, partindo das situações do cotidiano dos alunos, poderá transformar as aulas de Matemática de mera transmissão de regras para momentos de pesquisa e construção do conhecimento através das referências que os alunos trazem.

Bassanezi (2002) explica sobre essa mudança que a Modelagem pode trazer para as aulas de matemática:

O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada da realidade, e mesmo do processo histórico de construção da matemática. Assim é que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: “**enunciado – demonstração – aplicação**”, quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa, isto é, sua motivação, a formulação de hipóteses, a validação e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado. Estaríamos assim reinventando o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo da modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem (BASSANEZI, 2002, p.36).

Essa construção inversa que a Modelagem permite na educação matemática, condiz com os *cenários para a investigação* na perspectiva de Skovsmose (2000). Segundo o autor, esse ambiente convida o aluno a formular questões e depois a procurar as explicações. Nessa ação do aluno, nota-se que o conhecimento é tratado posterior à formulação de hipóteses.

Ponte (2003) também questiona essa ordem em que a investigação vem antes e separada no tempo e no contexto do processo de ensino e aprendizagem. Afirma, portanto, que deve haver uma relação estreita entre investigar, ensinar e aprender. Assim, a escola terá possibilidade de desenvolver competências não só de conhecimentos específicos, mas também

a capacidade de usá-los em processos de situações concretas aplicando as ideias e conceitos matemáticos para atuar reflexiva e criticamente em situações da vida (PONTE, 2003).

A Modelagem Matemática, portanto, além de trabalhar a matemática em uma ordem e nuance diferentes, permite sua compreensão e significação muito mais profundas, já que se dá num âmbito de construção do conhecimento. O desenvolvimento dos conteúdos também se torna mais atrativo aos alunos porque permite uma participação ativa e dinâmica (BURAK, 1992).

Barbosa (2004) afirma que a Modelagem cria um ambiente propício para a aprendizagem através da pesquisa, pois os alunos são levados a questionar e a investigar através da matemática, situações de outras áreas do conhecimento. O autor afirma que por isso ela é capaz de envolver, por meio da Matemática, o aprendizado de várias disciplinas, indo além da compreensão e resolução de um problema matemático.

A Educação por meio da pesquisa, caracterizada pelo *questionamento reconstrutivo*, segundo Demo (2003), envolve a motivação do aluno por saber questionar, propor pesquisas, buscar e interpretar dados e encontrar fontes. Depois, fundamenta-se na formulação e realização de projetos próprios por parte dos alunos, aproveitando o que já trazem como identidade cultural. Assim, Modelagem engloba o educar pela pesquisa porque dá oportunidade de construção do conhecimento ao longo do processo (LEHNEN; MADRUGA, 2013).

Biembengut (2014) diz que a Modelagem oferece um caminho que mostra e desenvolve a aplicabilidade da Matemática em situações do cotidiano, no currículo escolar juntamente com o tratamento formal que é o característico do ensino tradicional. Ela fala da capacidade que a Modelagem tem de dar sentido ao conteúdo estudado, já que faz a ligação da Matemática escolar com a Matemática da vida cotidiana do aluno, facilitando sua aprendizagem e tornando-a mais significativa.

A proposta de Modelagem Matemática pode dar oportunidade aos alunos de indagarem situações por meio da Matemática sem procedimentos fixados previamente, criando assim um espaço, um convite aos alunos para desenvolverem seus próprios caminhos na busca da solução dos problemas. Essa metodologia possibilita, portanto, uma contribuição para o desenvolvimento do pensamento reflexivo numa perspectiva sócio crítica (BARBOSA, 2001).

Muitas são as potencialidades da Modelagem Matemática como metodologia para uma aprendizagem de qualidade e muitos são também os desafios de propor tais atividades na sala de aula. As dificuldades se encontram no aluno, no professor e no currículo. No aluno e no professor por não ser usual para eles e no currículo porque a atividade não se prende a um

determinado conteúdo, mas se utiliza do conhecimento que vai se mostrando necessário para resolver cada parte do processo de modelagem.

No entanto, essa metodologia pode ser inserida na sala de aula em etapas para ir preparando os alunos para o processo de modelagem, sendo possível também adaptá-la ao currículo proposto. Barbosa (2004) defende a Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem na Educação Básica e a separa em níveis de aplicação:

Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. (...) Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução. (...) Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema (BARBOSA, 2004, p.8-9).

Assim, os casos 1 e 2 são passíveis de aplicação em sala de aula, obedecendo ao currículo e a uma sequência lógica, como se vê na classificação acima. Basta que, para um determinado conteúdo ser trabalhado com a Modelagem, o professor se encarregue de buscar uma situação que tenha sentido para os alunos e que possa problematizá-la a partir do que se quer trabalhar.

Dentro dessa perspectiva, também Almeida e Vertuan (2014) descrevem quatro formas possíveis de caracterizar as atividades de Modelagem dentro da realidade escolar. A *separação*, na qual desenvolve-se as atividades em cursos extracurriculares; a *combinação*, com a Modelagem Matemática aparecendo como auxiliar na introdução ou contextualização dos conteúdos; a *integração curricular* que tem os problemas como motivadores para o desenvolvimento dos conteúdos; por fim a *interdisciplinar integrada* que assinala um currículo totalmente interdisciplinar, onde a Matemática não configuraria uma disciplina isolada.

Situamos nossa pesquisa dentro do segundo caso de Modelagem, de acordo com a descrição de Barbosa (2001) anteriormente citado e consideramos que ela se encaixa no formato da *combinação* e da *integração curricular*, como descrito por Almeida e Vertuan (2014). Acreditamos que nesses moldes, as atividades de Modelagem Matemática se adaptam bem em grande parte das realidades escolares brasileiras para os níveis de Ensino Médio.

1.7.2. As Etapas da Modelagem Matemática no Ambiente Escolar

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem caracteriza-se por utilizar nas aulas, situações que encaminham para investigações matemáticas. Diferente de apenas resolver uma situação-problema já estabelecida, as atividades com Modelagem

começam com os alunos ajudando na escolha do tema de investigação e seguem com procedimentos de pesquisa (ALMEIDA; VERTUAN, 2014).

Bassanezi (2002) descreve cinco etapas da modelagem de uma situação problema, a experimentação, a abstração, a resolução, a validação e a modificação. Segundo o autor, todas essas etapas não precisam ser sempre aplicadas. Podem ser escolhidas apenas as que se adaptem ao objetivo da atividade. No caso da utilização em sala de aula, como o objetivo principal com a Modelagem é a aprendizagem, então podem ser escolhidas as etapas de experimentação, abstração e resolução, por exemplo (BASSANEZI, 2002).

Biembengut (2014), afirma que a elaboração de modelos no ambiente de aprendizagem da matemática pode ser organizada em três fases, as quais são sinteticamente caracterizadas pela percepção do problema; formulação e resolução; significação e expressão do modelo.

Em Meyer *et al.* (2013) vemos essas etapas descritas em cinco momentos:

1) determinar a situação; 2) simplificar as hipóteses dessa situação; 3) resolver o problema matemático decorrente; validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real e finalmente, 5) definir a tomada de decisão com base nos resultados (MEYER *et al.*, 2013, p.28).

Para sintetizar as fases da modelagem apresentadas por esses autores, construímos o esquema representado na Figura 2.

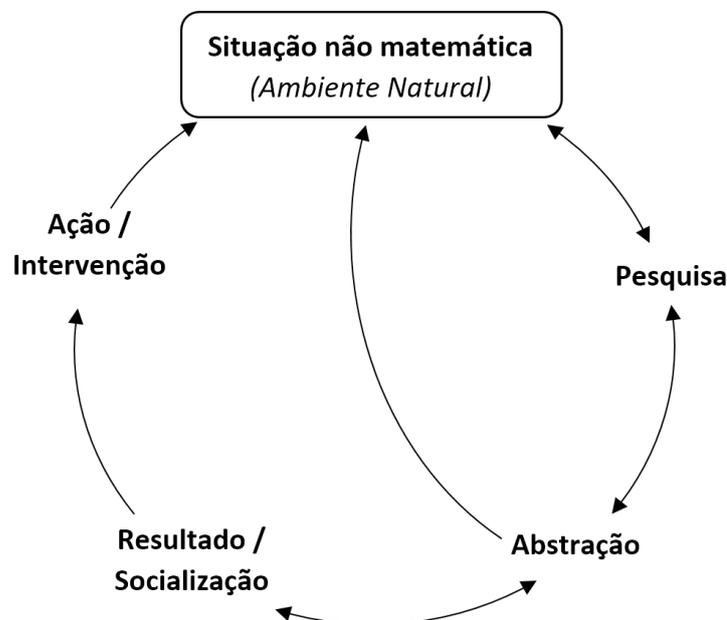


Figura 2 – Fases da Modelagem

Partindo de uma situação não matemática, ou da vida, a modelagem começa com a problematização desse contexto que até então era alheio à matemática. O acesso ao problema

se dá na **Pesquisa**, onde ocorre a coleta dos dados. Essas informações coletadas são formuladas e matematizadas na fase da **Abstração**. Se nessa fase não se chegar em uma delimitação devida do problema matemático, então poderá retornar a situação para novas apreensões e compreensões. Na fase da **Resolução**, ocorre a busca dos resultados do problema com a socialização desses resultados entre os alunos. Nessa conclusão da modelagem, obtém-se o resultado ao problema inicial, podendo-se tomar decisões a partir dele, constituindo a fase final **Ação/ Intervenção**.

Na fase de **Abstração** será o momento oportuno para o professor abordar os conteúdos matemáticos, mostrando aos alunos sua importância, aplicada aquela realidade analisada. O aluno estará, assim, recriando o conhecimento dentro de seu contexto histórico e social e a partir de sua própria pesquisa.

Destacamos a fase **Ação/ Aplicação** como o momento onde os estudantes planejam as intervenções na sociedade, a partir dos problemas estudados. Skovsmose (2010) afirma que nem todas as atividades de Modelagem na Educação Matemática chegam nessa fase, mas que ela é imprescindível para a formação cidadã dos estudantes porque constitui-se o espaço de encorajamento dos alunos para ações de transformação da realidade que o rodeia.

1.8. Metodologia

A presente pesquisa se propõe a investigar, elaborar e testar uma proposta de aplicação da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática Aplicada do ensino médio do Estado de Goiás. O intuito maior será o de compreender como os alunos aprendem através da Modelagem Matemática, para formalizar um material que seja suporte para atividades iniciais de Modelagem.

Depois de definir, baseadas na literatura, como seria concebida a Modelagem na Educação Matemática iniciamos o processo de criação das propostas de atividades. Consideramos esse momento, uma das principais fases de aprofundamento teórico da pesquisa, pois trata-se da síntese de nossa compreensão sobre as características e delineamentos da modelagem.

Ainda nesse processo de criação, destacamos como o mais importante e dispendioso, o processo de escolha dos temas. Com o diferencial de ser uma metodologia de ensino pautada em situações reais do cotidiano dos alunos, a Modelagem Matemática necessita de planejamento inicial mais exigente, com a pesquisa de temas de interesse dos alunos e passíveis de serem explorados segundo o conteúdo desejado. No entanto, depois da delimitação desses

assuntos, as demais etapas de elaboração são mais simples. Como trata-se de uma atividade sem procedimentos totalmente definidos, planejar a aplicação, em si, foi o mais simples, bastou estimar tempo, locais e materiais didáticos envolvidos.

As aplicações foram feitas em três momentos, uma no último bimestre de 2015 e as outras duas no 1º e 2º bimestres de 2016. O detalhamento de cada uma dessas aplicações consiste nos artigos que compõem o segundo e terceiro capítulo dessa pesquisa.

Para analisar e avaliar essas aplicações, baseamo-nos em perspectivas educacionais, tais como a Investigação Matemática, Educação pela Pesquisa, Educação Matemática Crítica e Aprendizagem Significativa Crítica e discutimos os resultados segundo indícios de aproximações a elas.

Ao final, tendo o conhecimento de como os alunos das turmas de Ensino Médio participaram das atividades, buscamos descrever e delimitar melhor as atividades a fim de facilitar a aplicação em outras turmas, montando assim, um possível roteiro para futuras atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio.

Por ser uma investigação na qual a pesquisadora estava lado a lado com os sujeitos da pesquisa, buscando compreender os resultados através da análise descritiva dos fatos, baseamo-nos nas abordagens da pesquisa qualitativa. Segundo Ludke (1986), essa aproximação do pesquisador ao local natural dos sujeitos; a obtenção descritiva dos dados e a valorização do processo e não do produto são as marcas dessa perspectiva metodológica.

Nas delimitações sobre a pesquisa qualitativa, Rosa (2013) diferencia as *Empíricas* e as *Empíricas Experimentais*. As classificadas como *empíricas*, buscam na realidade sua observação, a partir da qual, tecerá sua análise; já as do tipo *empírica experimentais* têm a intenção de modificar condições do meio e observar o resultado dessa intervenção (ROSA, 2013). Nossa pesquisa, portanto, possui natureza *empírica experimental* e dentro dessa perspectiva possui também traços da *pesquisa – ação*, segundo autores como o próprio Rosa (2013) e Fiorentini (2004).

Fiorentini (2004) define a pesquisa-ação como uma investigação da intervenção, onde de mãos dadas, andam a prática reflexiva e a prática educativa. Isso quer dizer que ao se investigar a prática educativa, chega-se a conclusões e orientações para transformar essa mesma prática. O autor afirma também que na pesquisa-ação, o pesquisador se introduz no ambiente para juntamente com a observação, agir de forma a ajudá-lo em direção a melhoria das práticas para uma maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes.

1.8.1. Os sujeitos da Pesquisa

Para ter uma liberdade de atuação e também uma maior aceitação da proposta, que se mostrava muito diferente do que as escolas estão acostumadas, escolhemos o colégio onde a pesquisadora atua como professora desde 2009. A aplicação das atividades de Modelagem Matemática se deu, portanto, em uma das turmas de segunda série do Colégio da Polícia Militar de Goiás (CPMG), unidade Dr. César Toledo.

Almeida e Vertuan (2014) reforçam que nas atividades de Modelagem Matemática, o professor deve conhecer os alunos em suas individualidades porque só assim será possível orientá-los, conduzindo-os segundo a forma mais adequada para cada um, de acordo com seus saberes e limitações. Sendo ainda o primeiro contato dos alunos com essa estratégia de ensino e aprendizagem, foi importante a proximidade deles com a pesquisadora que já estava como professora de matemática deles desde o ano anterior.

O CPMG localiza-se no bairro Alexandrina da cidade de Anápolis. Antigo colégio aplicação da Universidade Estadual de Goiás, ele se tornou colégio da polícia militar em 2006. Desde então toda a estrutura foi reformada e hoje o prédio conta com vinte duas salas de aula, um laboratório de informática, um laboratório de ciências, um auditório, um anfiteatro, duas quadras cobertas, um espaço de música, a biblioteca, a sala dos professores, as coordenações pedagógica e disciplinar e um prédio reservado para a parte administrativa.

Além da particularidade de ser um Colégio da Polícia Militar, essa unidade escolar é destaque nacional quanto a nota no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), por ter uma herança de qualidade no ensino e por contar com uma administração pedagógica e disciplinar muito comprometida. Isso poderia remeter a facilidade em trabalhar com uma proposta desafiante como é a Modelagem Matemática, no entanto, muitas das dificuldades de aplicação dessas atividades, se acentuam em tal realidade. Uma delas é a exigência quanto ao cumprimento do currículo por parte da Secretaria de Educação. Por ser um colégio de destaque, a supervisão técnica pedagógica se faz de forma mais rígida, cobrando que se cumpra com exatidão os conteúdos propostos para o bimestre. Isso, muitas vezes, obriga o professor a se limitar a mera transmissão de conteúdo por carecer de tempo hábil para a utilização de diferentes estratégias de ensino e de aprendizagem.

Outra dificuldade é o número elevado de alunos por sala e a recomendação de manter todos em silêncio para não atrapalhar as turmas ao lado. São em média 40 alunos em cada turma, sendo que apenas duas, das 18 de ensino médio do turno matutino, tem 30 estudantes. Esse problema de lotação advém da grande procura por vagas.

Apoiadas na recomendação de Biembengut (2014) escolhemos, portanto, a menor turma para a pesquisa. A autora afirma que as atividades de Modelação – nome utilizado por ela para referir-se a Modelagem Matemática aplicada ao ensino – só ocorrem bem em turmas com menos de 30 alunos. Nas turmas maiores, o tempo disponível nas escolas é insuficiente para atender e orientar todos os grupos. Assim, constituem-se sujeitos da pesquisa os 28 alunos da turma em que foram testadas as oficinas.

1.8.2. O Desenvolvimento das atividades

Anterior ao desenvolvimento das atividades houve a fase de escolha dos temas. Direcionados pelo conteúdo que deveria ser trabalhado em cada bimestre, buscamos assuntos de outras áreas e que pudessem ser explorados pelos alunos, segundo a realidade deles e seus interesses. Essa etapa de criação foi a mais demorada, envolvendo momentos de idealização, pesquisa e elaboração da proposta.

Como ponto de partida para a idealização, havia o conteúdo que deveria ser trabalhado no período de aplicação, segundo as determinações do currículo mínimo exigido pela Secretaria de Educação. Depois e não menos importante que o conteúdo, havia a busca pelo tema de acordo com a realidade dos alunos.

Foram elaboradas três propostas que no seu desenvolvimento poderiam chegar nos conteúdos de Geometria Espacial, Sistemas Lineares e Trigonometria. São atividades próprias para serem trabalhadas no início de cada bimestre, com direcionamentos para a introdução e para o desenvolvimento dos conceitos principais. No entanto, se o professor quiser explorar mais os temas, será possível aproveitar o contexto da pesquisa para conduzir outras aulas ao longo do bimestre.

As nossas aplicações em sala de aula foram feitas somente para as primeiras aulas do bimestre. Como se tratava da primeira experiência dos alunos e da professora com a Modelagem Matemática, foi escolhido um formato de aplicação, dentro da *Alternativa de Combinação*, de acordo com as classificações de Almeida e Vertuan (2014). Segundo os autores, nesse formato o professor invoca aplicações e modelações no decurso das aulas, para introduzir ou criar ambiente para construir futuros conhecimentos matemáticos.

Dentro da perspectiva da Investigação Matemática na sala de aula, Skovsmose (2000) defende que as aulas tradicionais de matemática, nas quais o professor expõe a teoria e os alunos resolvem exercícios, não precisam ser abolidas. Elas podem servir para consolidar o que foi aprendido nas aulas investigativas, sugerindo um modelo de trabalho similar à *Alternativa da Combinação*.

As propostas de atividade são apresentadas a seguir, com o intuito de mostrar ao leitor como foram idealizadas, elaboradas e aplicadas. Trata-se de um breve comentário sobre cada uma, já que o detalhamento consta nos apêndices e a discussão da aplicação e dos resultados constituem os próximos capítulos.

1.8.3. Atividade 1: Investigação sobre redução do volume de lixo

A primeira atividade objetivou trabalhar o conteúdo de Geometria Espacial relativo ao cálculo de volume dos sólidos. Várias ideias surgiram, mas precisávamos encontrar um contexto de investigação para que o processo de modelagem fizesse sentido para os alunos. Nesse tema, em específico, tínhamos um desafio porque na disciplina de Recursos Didáticos que eu cursava naquele momento no mestrado, as professoras haviam solicitado que levassemos uma proposta de aula utilizando uma estratégia de aprendizagem segundo nossos temas de pesquisa. Precisariamos aplicar numa turma e depois adaptar para uma apresentação aos colegas do mestrado, cursistas dessa disciplina.

O desafio era, portanto, elaborar uma proposta de investigação que fizesse parte da realidade da vida dos meus alunos e também dos meus colegas mestrandos que passariam por meus alunos naquela atividade da disciplina. Passamos a observar no prédio do mestrado e nas dependências do colégio algo passível de trabalhar volume de sólidos. Um problema identificado nas duas realidades foi o excesso do uso de copos descartáveis e seu errado descarte, por não haver lixeira apropriada para eles.

Várias intervenções poderiam ser propostas, como diminuir o uso de copos descartáveis ou reciclá-los por exemplo. Mas uma ação efetiva que imaginávamos possível para o momento, seria reduzir o volume de lixo gerado através do descarte incorreto dos mesmos.

A partir desse contexto sobre excesso do volume de lixo, elaboramos uma atividade de Modelagem que no seu desenvolvimento levava a questões sobre o conteúdo de sólidos geométricos. O foco principal era a compreensão do conceito de volume de um sólido, mas vários temas auxiliares foram abordados, como Proporção e Porcentagem. Os materiais da atividade encontram-se nos apêndices e o detalhamento da aplicação será discutido no próximo capítulo.

1.8.4. Atividade 2: Montando um prato com Números

A área escolhida para a atividade foi a Nutrição, com o cuidado de contextualizar com a realidade de vida dos alunos do ensino médio. Embora não seja a saúde a preocupação nessa fase da nossa vida, percebemos no comportamento dos alunos, a tomada de consciência sobre

a alimentação devido à preocupação estética. A ida às academias, a atenção ao corpo e o ganho de massa muscular começa a gerar, já na adolescência, uma atenção ao que comem.

Aproveitando essa abertura dos alunos, a ideia foi trabalhar uma formação nutricional através da atividade de modelagem. Para a problematização do tema, decidimos usar textos e vídeos para inspirar o debate que deu início ao levantamento do problema e a busca de resposta para tal.

Depois das reflexões, coleta e organização de dados em tabelas, fomos chegando ao problema que era montar um prato balanceado, segundo as quantidades recomendadas de carboidratos, lipídeos e proteínas. Foi possível trabalhar os conceitos de matrizes associadas a sistemas lineares e a resolução dos sistemas.

1.8.5. Atividade 3: Conhecendo uma Trilha Ecológica por meio da Trigonometria

Novamente havia a necessidade de cumprir com o currículo estabelecido pela Secretaria de Educação. Para o bimestre em que seria desenvolvida a atividade o conteúdo era Trigonometria. Inspirados em uma aula encontrada no Portal do Professor no site do MEC com o tema Medir alturas Inacessíveis, começamos a elaborar nossa proposta.

O problema proposto foi o de investigar matematicamente a trilha ecológica da UEG. A trilha possui três portais que separam as formações vegetais (fitofisionomias). Um dos aspectos que caracteriza uma fitofisionomia é a altura da vegetação e para estudar e entender matematicamente a trilha seria necessário coletar as medidas das árvores de cada trecho. A trigonometria no triângulo seria apresentada como ferramenta para medir as alturas inacessíveis das árvores de maior porte e também dos portais (Figura 3).



Figura 3 – Alunos do Ensino Médio em Visita a Trilha do Tatu, localizada na Universidade Estadual de Goiás, Campus de Ciências Exatas e Tecnológicas, Anápolis/GO.

Fonte: Acervo pessoal das autoras

A fase que antecedeu a visita à trilha, ainda em sala de aula, caracterizou-se pelo diálogo alunos-professora, definindo juntos os principais pontos de observação e coleta de dados. Decidimos representar os dados coletados em maquetes que seriam confeccionadas durante as aulas de matemática após a visita a trilha. Todo processo de aplicação foi realizado em dez aulas, que era o tempo que dispúnhamos para trabalhar o conteúdo abordado.

1.8.6. A Coleta e análise dos dados

A coleta dos dados foi realizada utilizando três instrumentos: as observações da participação oral dos alunos, registradas pelo pesquisador em relatórios escritos imediatamente após ministrar as oficinas, registro escrito dos alunos contido numa folha de atividade e as entrevistas coletivas com os alunos da turma avaliando os resultados da pesquisa, a partir de um roteiro semiestruturado, obedecendo as orientações de Lüdke (1986).

Para tecer as considerações acerca dos resultados realizamos a interpretação e síntese dos dados obtidos com os relatórios e os registros das entrevistas. Bem como um aprofundamento da revisão literária, buscando relacionar as descobertas feitas durante o estudo com o que já existe na literatura.

E por fim, como produto da pesquisa, foi produzido um material de apoio pedagógico, que sirva como orientação para a aplicação da metodologia na educação básica e também como exemplo de ideias, inspirando a elaboração de outras estratégias de ensino com a Modelagem Matemática.

1.9. Referências:

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; Silva, K.A. P. *Modelagem matemática em foco*. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna Ltda, 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O Que É? Por quê? Como? *Veritati*. Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. *Anais...* Rio Janeiro: ANPED. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática no ensino fundamental*. Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno III: o currículo do ensino médio, seu sujeito e o desafio da formação humana integral / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [autores: Carlos Artexes Simões, Monica Ribeiro da Silva]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013. 49p.

BURAK, D. *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Campinas, Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. *Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula*. Revista de Modelagem e Educação Matemática, v.1, n1, p.10-27, 2010.

COLEÇÃO M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Disponível na URL: <http://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em 2017.

CORTELLA, M. S. *A escola e o Conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos*. 2 ed. São Paulo: Cortez – Instituto Paulo Freire, 1999. 166p.

D' AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus, 2012.

DEMO, P. *Educar pela Pesquisa*. Campinas: Autores Associados, 2003. (Coleção educação contemporânea).

FERREIRA, D. H. L. O. *Tratamento de questões ambientais através da modelagem matemática: um trabalho com alunos do ensino fundamental e médio*. 2003. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

FIorentini, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. 17 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. *Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa*. Elaborado pelo Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

LEHNEN, C. A.; MADRUGA, Z. E. F. *Modelagem Matemática e construção de maquetes: relato de uma prática do curso de licenciatura*. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. ULBRA, Canoas Rio Grande do Sul, 2013.

LÜDKE, M. *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MATEMÁTICA. Curitiba: SEED-PR, 2006. – p. 216. Disponível na URL: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/livro_didatico/matematica.pdf. Acesso em 2017.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P. M. DA. Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat*, p. 25–39, Lisboa, 2003. 1 CD-ROM.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, University of Aalborg. v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

2. APLICAÇÃO DA PRIMEIRA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1. Modelagem matemática em atividades sobre a temática do lixo: relações com a aprendizagem significativa crítica

Gislaine M. Ferreira Matos¹

Mirley Luciene dos Santos²

Karly Barbosa Alvarenga³

RESUMO: Muitas são as maneiras de conduzir um ensino e uma aprendizagem de matemática por meio de abordagens que envolvam o contexto sócio cultural dos estudantes. A proposta da Educação Matemática Crítica via Modelagem Matemática tem mostrado resultados relevantes nesse sentido e oportuniza a Aprendizagem Significativa Crítica. Dessa forma, esse trabalho tem como objetivo principal apresentar resultados de um estudo realizado a partir registros dos estudantes do Ensino Médio que participaram de uma atividade prática de cunho socioambiental. Tal atividade modelou uma problemática relacionada ao lixo produzido em uma escola pública do estado de Goiás. Esse contexto propiciou analisar se a Modelagem Matemática, em sua perspectiva crítica, pode atender aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica. A atividade problematizada por meio de uma situação próxima da realidade dos alunos e conduzida segundo a proposta da Modelagem Matemática possibilitou a participação crítica dos alunos com reflexões sobre as ações para resolver o problema analisado. Foi possível gerar um ambiente de diálogo, de aprendizagem por meio de perguntas e investigações, de diversidade nas formas e nos materiais em que se pode aprender matemática e, portanto, observou-se as aproximações da Modelagem aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica. **Palavras-chave:** Ensino Médio. Educação Matemática Crítica. Conceito de Volume.

¹ Mestranda em Ensino de Ciências, Universidade Estadual de Goiás/UEG, gisamferreir@gmail.com

² Doutora em Ecologia, Universidade Estadual de Goiás/UEG, mirley.santos@ueg.br

³ Doutora em Educação Matemática, Universidade Federal de Goiás/UFG, karlyba@yahoo.com.br

2.2. Introdução

Formar cidadãos críticos e participativos na sociedade é uma das responsabilidades da escola em todos os seus níveis e principalmente na Educação Básica, por constituir a base da formação dos indivíduos. Sabemos que o modelo tradicional de ensino, baseado na mera transmissão de conteúdos e na concepção de alunos receptores de conhecimentos, não é adequado para atingir essa meta. Para contrapor essa realidade, Skovsmose (2001) propõe a Educação Matemática Crítica (EMC), onde alunos e professores tenham igual autonomia no processo de escolha dos temas de estudo; que esses sejam do interesse dos estudantes e que sejam críticos em relação aos problemas da sociedade.

Movimento com mais de três décadas, a Modelagem Matemática como metodologia de ensino tem sido amplamente discutida e possui um valor significativo para a educação brasileira (BIEMBENGUT, 2009). Barbosa (2009) a define como um ambiente para a aprendizagem, no qual os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade e vindas de outras áreas. Também se configura como oportunidade para os alunos investigarem situações do dia a dia, utilizando a matemática sem encaminhamentos previamente fixados e com inúmeras maneiras de encontrar as respostas.

A Modelagem Matemática, segundo conceituações de autores brasileiros como Barbosa (2003) e Almeida e Silva (2010), pauta-se na EMC quando propõe projetos que envolvam a participação crítica dos alunos em investigações de cunho social, político, ambiental e econômico, utilizando a matemática como ferramenta. Os temas relacionados às questões socioambientais, por exemplo, são próximos da realidade dos alunos em qualquer nível de escolaridade e podem encaminhar-se para investigações matemáticas, permitindo uma participação ativa e crítica perante a sociedade ao buscar e propor soluções para os problemas a que esteja inserido, como afirma Meyer, Caldeira e Malheiros (2013).

A Aprendizagem Significativa Crítica é outro referencial relacionado a esse compromisso de formação dos estudantes para uma conduta crítica e participativa. Moreira (2000) a propõe, como sendo um tipo de aprendizagem que permita ao indivíduo fazer parte da sua cultura, mas de forma autêntica, ou seja, não perdendo sua individualidade ao se submeter a regras, paradigmas ou comportamentos subversivos.

Dessa forma, pautado nesses pressupostos teóricos da Aprendizagem Significativa Crítica e da Modelagem Matemática, esta pesquisa pretende a partir da análise dos resultados da aplicação de uma atividade de Modelagem no Ensino Médio responder ao questionamento: A Modelagem Matemática segundo uma situação socioambiental, para a primeira série do

Ensino Médio, em uma escola pública de Goiás, pode atender aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica?

Assim, no âmbito da pesquisa qualitativa esse trabalho utiliza abordagens de pesquisa ação ao tratar-se de um estudo realizado pelo professor como pesquisador de sua prática docente, buscando investigar novas metodologias de ensino a fim de transformar sua realidade (FIORENTINI, 2004; ROSA, 2013). Pretendemos, portanto, compreender como se dá o processo de ensino e aprendizagem em uma atividade de Modelagem Matemática, verificando as possibilidades de adotá-la como uma prática pedagógica no Ensino Médio capaz de oportunizar a formação dos estudantes para a participação crítica e cidadã na sociedade.

2.3. A Modelagem Matemática e a Aprendizagem Significativa Crítica

As concepções sobre quais são as formas de ensinar, devem adequar-se com a visão do tipo de homens pretendemos formar. Se almejamos cidadãos capazes de enfrentar os desafios da sociedade, então competências intelectuais mais amplas, como a autonomia, a criticidade, a investigação e o discernimento na tomada de decisões devem ser contempladas no processo de ensino e aprendizagem. Quanto a matemática, não é possível saber tudo o que os alunos irão precisar no futuro, mas é certo que precisarão ter postura crítica, ativa e autônoma para serem protagonistas de transformações necessárias na sociedade (BURAK, 2010).

É dentro desse entendimento da educação que Burak (1992, 2010) analisa e propõe a Modelagem Matemática como metodologia de ensino. Ele afirma que:

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões (BURAK, 1992, p.62).

Existem, no entanto, várias abordagens para a Modelagem na Educação Matemática, como nos indica Araújo, (2002). Às vezes, as atividades com modelos podem ser utilizadas para justificar o ensino e a aprendizagem de matemática ou para mostrar a importância da matemática na vida, por exemplo. Noutras vezes, as investigações com a Modelagem admitem posturas mais reflexivas por parte dos alunos e os temas dos projetos se interessam pelos problemas da sociedade. Nesse último enfoque, a Modelagem é trabalhada sob o ponto de vista sociocrítico, segundo as palavras de Barbosa (2009) e Araújo (2009).

De acordo com essa perspectiva da Educação Matemática Crítica, Araújo (2009) dá uma boa definição da Modelagem nesses moldes:

(...) uma abordagem da modelagem na educação matemática que não se preocupe, apenas, em dar instrumentos matemáticos aos estudantes ou em apresentar a eles

exemplos de aplicação da matemática à realidade (o que poderia reforçar concepções absolutistas da matemática). Mais que isso, pretendo que a modelagem os faça refletir sobre a presença da matemática na sociedade, seja em benfeitorias ou em problemas sociais, e reagir contra as situações críticas que a matemática também ajudou a construir (ARAÚJO, 2009, p. 64).

Em entrevista para Ceolim e Hermann (2012), Ole Skovsmose alerta para a necessidade de uma postura crítica em relação à Modelagem Matemática. Skovsmose, afirma que para estar de acordo com a EMC, as atividades de modelagem precisam estar ligadas às ações de participação na sociedade (CEOLIM; HERMANN, 2012).

Malheiros (2012) afirma que nas atividades de Modelagem, na perspectiva da EMC, o processo de ensino e aprendizagem não se trata apenas da Matemática, mas dos aspectos relacionados a participação e ação consciente na sociedade. Outro destaque da autora é que as atividades de Modelagem nos domínios da EMC, admitem vários caminhos para chegar às soluções dos problemas analisados e nem sempre há um único resultado ao problema (MALHEIROS, 2012). Também, Blum (2011) destaca a importância da Modelagem para a formação cidadã dos jovens. O autor afirma que os modelos matemáticos e a modelagem estão por toda parte e por isso, preparar os estudantes para a cidadania responsável pressupõe competências em modelagem. Afirma ainda que a Modelagem tem com o papel de contribuir tanto no desenvolvimento de habilidades matemáticas como o de ajudá-los a melhor entender e intervir no mundo. Esse enfoque da Modelagem Matemática relacionada aos pressupostos EMC como citamos acima, nos remete a Aprendizagem Significativa Crítica, proposta por Moreira, (2000).

Se pretendemos que os estudantes consigam transferir o conhecimento aprendido no ambiente escolar para a sua vida, que realmente construam um conhecimento que os ajudem nas diversas exigências da vida real, não podemos ficar restritos a expor leis, técnicas e métodos prontos, muitas vezes distantes da complexidade das situações da vida. É dentro dessa visão que Moreira (2000) propõe a Aprendizagem Significativa Crítica como uma forma de aprendizagem fundamentada em um processo de busca, de reflexão e construção do conhecimento com foco na formação para a criatividade, tolerância, inovação e reflexão crítica. O autor afirma ainda que se trata de uma forma de aprendizagem onde o conhecimento não é depositado nos alunos como verdade absoluta e, portanto, relaciona-se com a incerteza, com a probabilidade, admitindo que o conhecimento é uma construção ou invenção humana e que não captamos toda a realidade, apenas a representamos.

Moreira (2000) fala de oito princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica, que segundo ele são passíveis de aplicações em sala de aula. Em suma, esses princípios propõe: i - um ensinar/aprender por meio de perguntas e não de respostas (*Princípio da interação social e do questionamento*); ii - uma diversidade de materiais didáticos (*Princípio da não centralidade do livro texto*); iii – uma visão do aluno como perceptor/ representador do mundo (*Princípio do aprendiz como perceptor/representador do mundo*); iv – que o significado esteja nas pessoas e não nas coisas (*Princípio da consciência semântica*) v - o conhecimento como linguagem (*Princípio do conhecimento como linguagem*); vi) a aprendizagem pelo erro ou aprender a aprender (*Princípio do aprendizagem pelo erro*); vii) aprender a desaprender (*Princípio da desaprendizagem*); viii) que o aluno conviva com incertezas e relatividades (*Princípio da incerteza do conhecimento*).

A Modelagem Matemática no enfoque da Educação Matemática Crítica tem a qualidade de trabalhar os conhecimentos matemáticos inseridos em investigações acerca dos problemas da sociedade e é nesse ponto que ela pode instigar os alunos a aprender para buscar respostas aos temas investigados. Silva, Kato e De Paulo (2012) afirmam que essas especificidades da Modelagem se assemelham aos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica e, portanto, as atividades de Modelagem estão em consonância com os princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica.

2.4. Aplicação e avaliação da proposta: Modelagem Matemática na 1ª série do Ensino Médio

A atividade foi aplicada em uma turma de 1ª série do ensino médio do Colégio da Polícia Militar do Estado de Goiás, unidade Dr. César Toledo, situado em Anápolis, GO. A idade dos alunos estava na faixa de 15 e 16 anos e acreditamos que a natureza investigativa e sociocrítica da modelagem seria muito apropriada para essa faixa etária em que os jovens mostram interesse pelos temas da sociedade e um desejo de participação e transformação no mundo (MOREIRA, 2000).

O período de aplicação foi de uma semana, que era o tempo que a professora dispunha para trabalhar o conteúdo abordado. Todo o processo se deu nas aulas de matemática, que são em número de cinco por semana. Essa atividade de Modelagem foi a primeira experiência da turma com esse tipo de prática educativa.

A turma estava encerrando o conteúdo obrigatório para essa série e iria começar a aprender os conceitos de volume dos sólidos geométricos que, naquela unidade escolar, é assunto previsto para a segunda série, mas que foi antecipado para preparar os alunos para as

avaliações externas. Como havia a necessidade de desenvolver o conteúdo previsto, levamos já pronto o tema da pesquisa que seria proposto aos alunos.

Inicialmente, buscamos um tema de investigação que fizesse parte da vida dos estudantes e, de forma mais específica, que estivesse presente no espaço da unidade escolar para que todo o processo de investigação fosse realizado durante as aulas. A intenção era que a atividade criasse oportunidades para que os envolvidos pudessem ser mais conscientes dos problemas sociais e ambientais de seu meio e que, com o resultado de suas análises, tivessem uma visão mais crítica de modo a ter condições de assumir a responsabilidade de melhorar sua própria realidade.

Como temática, escolhemos o excesso de lixo para depois encontrar um caso específico de investigação próximo ao cotidiano dos alunos. Dessa forma, aliado à necessidade de trabalhar o conteúdo de volume, veio a proposição de investigar um caso possível de redução do lixo produzido nas dependências da unidade escolar. Notamos que próximo aos bebedores de água de todos os setores administrativos e da sala dos professores havia copos descartáveis disponibilizados, mas não existiam lixeiras apropriadas para dispensar os copos usados de forma empilhada. Então, a partir dessa constatação, elaborou-se uma possível delimitação do problema:

Investigar e comprovar matematicamente que empilhar os copos descartáveis reduz o volume do lixo e gera grande economia com a redução dos sacos de lixo gastos para o descarte desses copos.

Mesmo com o problema delimitado, ele não foi apresentado de imediato aos alunos, para que eles pudessem pensar sobre quais tipos de materiais descartados geravam maiores volumes de lixo na unidade escolar, sobre quais atitudes adotar para não gerar tanto ou, ao menos, reduzir o volume de lixo produzido todos os dias. Essa atitude de ouvir os alunos e criar o espaço de reflexão, escolha e decisão conjuntas entre eles e o professor deu à atividade uma tônica democrática como é proposto para uma Educação Matemática Crítica.

Embora os alunos tenham se expressado e falado bastante sobre o problema do excesso de lixo produzido, eles não conseguiram imaginar uma situação que constituísse o tema de pesquisa matemática, com um problema e uma hipótese. Notada essa dificuldade, que consideramos natural por se tratar da primeira experiência da turma com a Modelagem, e para orientar melhor como eles deveriam conduzir a investigação, com base no que era planejado como conteúdo matemático a ser trabalhado com a atividade, foi proposta uma primeira questão para pensarem:

Que argumentos matemáticos poderiam ser utilizados para convencer as pessoas a compactarem copos descartáveis?

Todas as respostas dadas pelos alunos citavam a palavra volume, sinalizando um conhecimento prévio sobre esse conhecimento matemático. Com a intenção de introduzir com os alunos o estudo de um novo conteúdo, a professora aproveitou o momento para levá-los a refletir sobre qual seria o conceito formal de volume, qual a sua diferença com a definição de área e quais variáveis estão envolvidas quando se quer encontrar o volume de um sólido. Essa oportunidade que a Modelagem proporcionou tanto para revisar conceitos matemáticos já integrados pelos alunos, como para formalizar outros novos é observada também em Barbosa (2009).

A atividade tinha a intenção de deixar os alunos caminharem sozinhos na busca das respostas, onde o professor iria interferir somente quando não conseguissem mais avançar e perguntassem como calcular o volume de lixo, ou o volume das lixeiras, por exemplo. O intuito era o de não fornecer um conhecimento pronto e acabado, mas, permitir que, pela constatação da sua necessidade, eles fossem à busca dele. No entanto, eles mostraram-se muito passivos em relação a que atitude tomar, perguntando o tempo todo sobre quais contas teriam que fazer. Por isso, foi feita a pergunta abaixo, buscando dar algumas direções a serem tomadas na pesquisa.

Como podemos mostrar matematicamente a diferença no volume, compactando e não compactando os copos? Escreva suas reflexões e mostre os cálculos utilizados.

Organizados em grupos de cinco, eles foram incentivados a pesquisarem os dados necessários para resolver a questão, sendo fornecido para tal, fita métrica, calculadora e folhas para anotarem suas observações. Essa coleta de dados constituiu a pesquisa de campo realizada pelos alunos e foi muito importante para que pudessem, como pesquisadores, colher os dados de sua realidade.

Essa foi a etapa que mais gostaram de realizar porque puderam sair da sala, medir as lixeiras, observar medidas das pilhas de copos compactados e pesquisar, junto aos funcionários, sobre a demanda de lixo. Aqui dois pontos chamaram a atenção: primeiro a importância de atividades práticas de medidas para as aulas de matemática, porque os alunos, ao medir as lixeiras e os copos, puderam ver e entender, de forma mais concreta, conceitos simples de geometria, como a diferença entre raio e diâmetro, cone e cilindro, etc. O segundo ponto diz respeito à pesquisa sobre a quantidade de lixo produzido e o contato direto com as lixeiras, o que proporcionou uma conscientização sobre o excesso de rejeitos produzidos na escola.

Todos os grupos entenderam que teriam que calcular quantos copos cabiam em um mesmo saco, quando empilhados e quando não empilhados. A dúvida levantada foi: como calcular quantos copos cabem em um saco de lixo de 100 litros?

As tentativas de cálculo se dividiram basicamente em duas categorias, a primeira por estimativa, que não obteve muito sucesso, pois os alunos não conseguiram avançar nos raciocínios; e a segunda utilizando cálculos bem estruturados de geometria espacial. Essa segunda categoria ocorreu em apenas um grupo, em que um dos alunos apresentava um bom conhecimento sobre geometria espacial. Assim, ele sugeriu medir a área da secção longitudinal do copo descartável (que seria um trapézio) para saber quantos copos deitados caberiam no fundo da lixeira. Depois mediria o diâmetro da boca do copo para saber quantas camadas de copos caberiam na altura da lixeira (**Figura 4**).

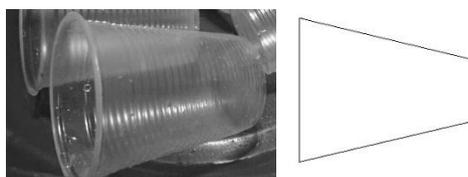


Figura 4 – Copo deitado e seção longitudinal do copo
Fonte: Arquivo pessoal das autoras.

A professora teve que intervir durante a atividade dos grupos e sugerir que pensassem no volume ocupado por cada copo. Ela mostrou que para calcular quantos copos cabem em um saco de 100 litros, bastaria saber quanto cada copo ocuparia dentro do saco, o que é a própria medida do volume de cada copo. Essa informação estava disponível na embalagem, ou seja, 200 ml.

Desse modo, os grupos fizeram as transformações de medidas necessárias e conseguiram chegar ao primeiro resultado. Só não chegaram a um mesmo número de copos porque alguns consideraram que seriam ocupados apenas 90 litros no saco, devido às partes do saco que não são aproveitadas, como a utilizada para amarrar, etc. Esses resultados foram socializados pelos grupos, levantando um diálogo sobre os raciocínios de cada grupo, criando um clima bem positivo de discussão e interação entre todos os 25 alunos participantes.

Em seguida, era necessário calcular quantos copos empilhados caberiam no saco. Nenhum grupo conseguiu imaginar um caminho. Mais uma vez, a professora conversou com toda a turma, levando-os a compreender que precisavam conhecer o volume do coletor de copos (**Figura 5**) para calcular o espaço, no volume do saco, que os copos compactados ocupariam.



Figura 5 – Coletor de copos descartáveis
Fonte: Arquivo pessoal das autoras

Como o coletor de copos não possui descrição de seu volume, os alunos perceberam que precisariam calcular o volume daquele cilindro. Esse foi o momento em que a professora dialogou com a turma para que os estudantes entendessem de forma intuitiva o conceito de volume. Para introduzir foi comentado que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Por meio de vários exemplos, eles dialogaram sobre como calcular essa quantidade de espaço ocupado e para entenderem melhor, a professora explicou sobre a necessidade de adotar uma unidade, que no caso do volume é a de um cubo de aresta medindo uma unidade de comprimento (LIMA *et al.*, 2001).

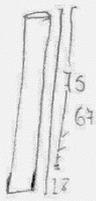
Com facilidade, os alunos disseram que no caso de um lugar retangular, como na sala de aula, bastava descobrir quantos cubos de 1 metro de lado, cabiam no chão e depois multiplicar essa quantidade pela medida da altura da sala. A professora explicou que de maneira análoga se calcula volume de um sólido cilíndrico, como é o caso dos coletores de copo. Explicou também que para descobrir quantos cubos unitários cabem no fundo do sólido é necessário calcular a medida da área da base. Apresentou assim, pelas noções intuitivas do cálculo do volume (LIMA, 2001), o volume do coletor de copo, como sendo a medida da área da sua base, multiplicada por sua altura.

Os alunos entenderam a maneira de calcular o volume, e estavam motivados a aprender, porque precisavam daquele conhecimento em suas investigações. Essa aplicação prática faz muita diferença, quando comparada a uma aula expositiva sobre fórmulas de calcular volume de sólidos geométricos. Obtido o volume do cilindro de empilhar os copos, mediram quantos copos caberiam dentro de cada coletor (uma média de 168 copos) e utilizando a regra de três simples, conseguiram encontrar quantos copos caberiam no saco de 100 litros. Os que consideraram o aproveitamento de 100 litros chegaram à média de 6100 copos e os que consideraram o aproveitamento de 90 litros do saco chegaram em 5466 copos por saco.

Todos os grupos pensaram em regra de três, mas apenas dois dos cinco conseguiram chegar sozinhos aos resultados esperados (**Figura 6** e **Figura 7**). Os demais tiveram dificuldades e a professora teve que intervir para ajudá-los a concluir o raciocínio e os cálculos, o que indica que eles não sabiam empregar o conteúdo de Proporção em uma situação contextualizada.

2- considerando que cada copo ocupa 200 ml, seria gasto 6100 copos para encher um saco de lixo de 100 l.

volume do compactador - 2,75 l
 cabe 168 copos

$$\begin{array}{r} 75 \text{ cm} \\ - 8 \text{ cm} \\ \hline 67 \text{ cm} \\ \hline 0,4 \\ \hline 168 \text{ copos} + 1 \end{array}$$


10 — 210
 100 — x
 $10x = 61000$
 $x = \frac{61000}{10}$
 $x = 6100 \text{ copos}$

2,75 — 168
 10 — x
 $2,75x = 1680$
 $x = \frac{1680}{2,75}$
 $x = 610 \text{ copos}$

616 16
 4 Gh

ing
 6100

Figura 6 – Cálculos do Grupo 1, demonstrando o uso da regra de três para chegar ao resultado
 Fonte: protocolo dos alunos.

$$\begin{array}{r} 2,75 \text{ — } 167 \\ 90 \text{ — } x \\ 2,75x = 15030 \\ x = \frac{15030}{2,75} \\ x = 5466 + 1 \\ - \text{ copo} = \\ 5466 \end{array}$$

Figura 7 – Cálculos do Grupo 2, demonstrando o uso da regra de três para chegar ao resultado.
 Fonte: protocolo dos alunos.

A pergunta final levava a um resultado importante para a reflexão e para a intervenção na realidade:

Nossa escola não possui coletores de copos descartáveis, mas com a economia de sacos de lixo, rapidamente poderíamos obter recursos para a compra destes. Como podemos mostrar com cálculos, o tempo de economia necessário para levantar o valor do investimento?

Aqui também, apenas dois grupos chegaram a um raciocínio plausível (**Figura 8** e **Figura 9**). Os outros dois responderam somente após muitas dicas da professora e um dos grupos não conseguiu acompanhar as dicas.

Handwritten calculations and names of students from Group 1:

Sem compactar: 500
Considerando os 100 litros

MARIANA
KATHLEEN
LAURA QUEIROZ
Mathewo Mariano
BRUNNA OLIVEIRA

③ $500 = 100$
 $600 = x$
 $500x = 60000$
 $x = \frac{60000}{500}$
 $x = 1200\%$
Houve uma redução de 1200% no volume

④ $10 \times 0,4 = 4$
 $4 \times 6 = 24$
 $1 \div 4 = 0,25 = \frac{1}{4} \quad 24 = 6$
 $6 + 24$ **6 dias e 6 h**

JB

Figura 8 – Cálculos do grupo 1, representando como chegaram ao resultado.
Fonte: protocolo dos alunos.

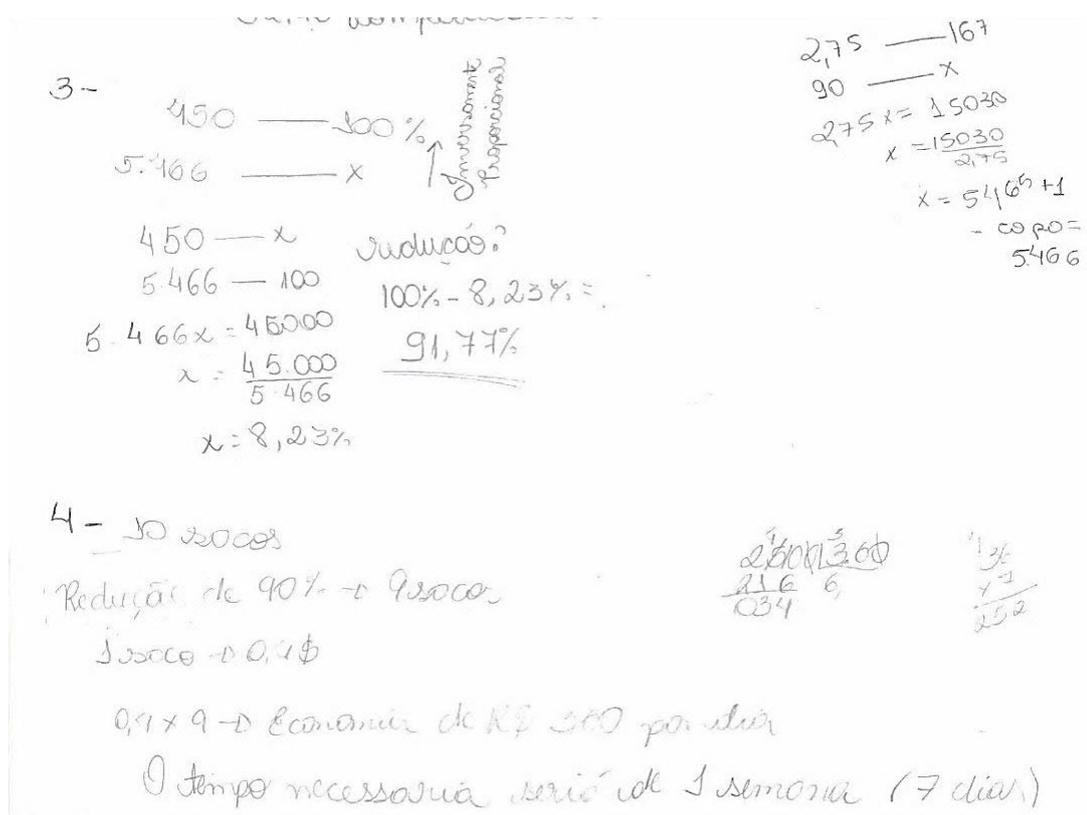


Figura 9 – Cálculos do grupo 2, representando como chegaram ao resultado.

Fonte: protocolo dos alunos.

Os dois grupos que conseguiram chegar a um resultado utilizaram as informações obtidas com os funcionários da limpeza, que haviam dito que os lixos das lixeiras em que havia copos eram recolhidos cerca de quatro vezes ao dia, totalizando quatro sacos. Os participantes desses grupos estimaram 10 sacos utilizados por dia. A redução por empilhar os copos geraria uma economia de cerca de R\$ 28,00 a cada sete dias, considerando o preço aproximado de cada saco (R\$ 0,40).

Com a economia seria possível comprar pelo menos um coletor por semana, cujo custo é de aproximadamente R\$ 25,00. Esse resultado suscitou vários comentários sobre o significado dessa simples atitude, tanto do ponto de vista financeiro quanto de contribuição para a redução de impactos no ambiente. Os alunos se surpreenderam com as respostas encontradas e a professora aproveitou para suscitar o diálogo sobre a importância dos resultados numéricos, ao darem consistência e respaldo para ações de intervenção na realidade. Gerar reflexões sobre as ações para resolver os problemas da realidade, analisados no processo de modelagem, é um aprendizado muito necessário, segundo a perspectiva crítica da Modelagem Matemática (BARBOSA, 2009; ALMEIDA; SILVA, 2010).

Para a reflexão sobre o aprendizado com a atividade, foram também analisados os comentários escritos ao final da folha de orientação, em que se pedia para que os alunos avaliassem e escrevessem as suas considerações. Os 25 alunos deixaram comentários

favoráveis à aplicação da proposta. Alguns dos registros são transcritos a seguir. As transcrições são literais e identificadas apenas pela letra A, seguida de um número.

A1 – *Uma atividade importante e bem melhor para o nosso aprendizado.*

A2 - *Essas atividades faz a aula ficar mais interessante fazendo que nos aprendemos mais.*

A3 - *...uma maneira mais descontraída de aprender o conteúdo.*

A4 - *Eu gostei muito, pois pelo menos nós saímos e vimos a matemática fora da sala.*

A5 - *Boa atividade, pois leva o aluno a entender melhor a matéria se ela for aplicada de maneira prática no dia a dia.*

A6 - *Eu acho que antes de qualquer intervenção para reduzir o volume dos copos descartáveis, os professores deveriam deixar de usar copos e trazer suas próprias garrafinhas porque eles são os que mais usam os copos.*

Embora os alunos tenham mostrado dificuldades e uma postura pouco ativa durante o trabalho, na avaliação deles citaram que a atividade ajudou no aprendizado, levando-os a um melhor entendimento do conteúdo, afirmaram ter sido mais interessante e proveitosa do que outras aulas de matemática e demonstraram interesse na participação nos diálogos e na pesquisa dos dados fora da sala de aula. Notamos que a atividade proposta por meio de uma situação problema, bem próxima da realidade dos participantes, possibilitou despertar o interesse e inspirar reflexões de cunho social e ambiental. Destacamos aqui as potencialidades que a perspectiva crítica da modelagem tem em favorecer a compreensão do papel da matemática na sociedade. Dentro desse contexto, Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) dirigem-se à Modelagem como *aprendizagem da vida*, em função da sua contribuição na leitura de mundo, na tomada de decisões e na formação para a cidadania.

Esse fato também foi constatado por Soares *et al.* (2014) no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem com aplicações das funções exponenciais. Os autores ressaltam que atividades abordando aplicações no dia a dia do aluno permitiram que eles compreendessem a utilização da matemática. Constatam, portanto, que as atividades de Modelagem nas aulas de matemática favorecem a construção do conhecimento e criam um ambiente capaz de desenvolver cidadãos críticos, ativos e participativos do mundo que os cerca.

O comentário da aluna A6 nos chamou a atenção porque, nele, ela demonstrou que estava interessada em atitudes que diminuíssem de forma efetiva a quantidade de lixo. Na

verdade, todos os alunos, de alguma forma, levantaram sugestões de intervenção para a redução do lixo. Essas reflexões interdisciplinares e sociais dos alunos e o interesse por ações para melhorar a situação de sua realidade, só foram possíveis numa aula de matemática, devido à natureza problematizadora e crítica da Modelagem Matemática. Freitas (2016), atesta a necessidade de oportunizar aos alunos momentos como esses, a fim de garantir aprendizados que transcendam ao conhecimento disciplinar.

Destacamos a necessidade que os alunos viram em utilizar os resultados obtidos no processo de modelagem da situação problema, para fundamentar ações para resolver o problema socioambiental analisado. Essa é uma exigência da Educação Matemática Crítica, promover ações de participação cidadã e de transformações da realidade que nos cercam (SKOVSMOSE, 2001; ALMEIDA; SILVA, 2009).

Com a aplicação da atividade, podemos refletir sobre alguns pontos acerca da contribuição da Modelagem Matemática para a aprendizagem dos estudantes de Ensino Médio, destacamos alguns que respondem aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica, segundo Moreira (2000), como citado anteriormente.

O *Princípio da Interação social e do questionamento* foi observado na condução da atividade onde os alunos foram incentivados, por meio de perguntas, a darem suas sugestões sobre como resolver o problema, partindo de suas noções intuitivas sobre volume e chegando, com a ajuda da professora, aos resultados e a compreensão do conteúdo matemático em questão. Esta característica da Modelagem Matemática de fundamentar-se na busca de respostas para uma situação não matemática permite a aprendizagem por meio do questionamento e ao dar autonomia e voz aos alunos, gera a interação entre o professor e os alunos (SILVA; KATO; DE PAULO, 2012).

O *Princípio da não-centralidade no livro texto* foi observado porque utilizamos um material elaborado com dados reais para o estudo, advindos de uma situação do ambiente natural dos alunos. Além disso, os estudantes possuíam uma familiaridade com a situação analisada e uma consciência da necessidade de refletir sobre ações para reduzir o lixo, fazendo com que o tema de estudo adquirisse significado para eles e também os despertasse interesse por aprender. Relacionamos, portanto, esse ponto como um indicativo do *Princípio da consciência semântica*.

O *Princípio do aluno como perceptor/representador* contrapõe a visão do aluno como receptor de ideias, considerando que o conhecimento é construído pelo aluno por meio de sua percepção do mundo e, dessa forma, relaciona-se também com seus conhecimentos prévios. Observamos esse princípio ao não utilizar a narração de definições prontas para os alunos e sim

estimulando o desenvolvimento de sua própria compreensão do problema a partir de seus conhecimentos prévios sobre volume para encontrar os seus caminhos de resolução.

Nos cálculos finais da questão, a maioria dos grupos não conseguiu concluir o raciocínio, necessitando de orientação da professora. No entanto, traçaram algumas estratégias de resolução que, mesmo sem sucesso, foram importantes para contrapor ao raciocínio correto. Ou seja, o erro serviu de trampolim para um novo aprendizado e, nesse ponto notamos uma aproximação ao *Princípio da Aprendizagem pelo erro*.

O momento em que um dos grupos tentou resolver o problema através de um caminho muito longo envolvendo as secções longitudinais dos copos e a professora sugeriu um raciocínio mais simples, ela estava mostrando aos alunos que existem várias possibilidades, diversos raciocínios e que devemos estar abertos para “desaprender” no sentido de aprender melhores caminhos, ideias mais atualizadas, estratégias mais inteligentes, etc. Esse é o *Princípio da desaprendizagem* tão importante para uma sociedade em constante transformação, como afirma Moreira (2000).

O resultado final da atividade mostrando que com a economia dos sacos de lixo geraria recursos para comprar pelo menos um coletor por semana, mostrou aos alunos que a matemática, por meio da modelagem da situação da vida, foi capaz de fundamentar e justificar possíveis ações para resolver o problema. Nesse ponto observamos a aproximação ao *Princípio do Conhecimento como Linguagem*, isto é, a Matemática pôde ser trabalhada como um meio de avaliação do mundo, um meio de ler e entender a realidade (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013).

O *Princípio da Incerteza do Conhecimento* é um dos mais dificilmente trabalhados em uma aula tradicional de matemática, tratando-a como ciência exata e reforçando seu poder formatador e a ideologia da certeza (SILVA; KATO; DE PAULO, 2012). A aplicação da Modelagem desenvolvida nessa pesquisa, pôde discutir essa ideologia da certeza ao admitir distintos caminhos e até distintas respostas para o mesmo problema, levando em conta as diferentes delimitações dos dados, estabelecidas por cada grupo.

A atividade de Modelagem Matemática segundo uma situação socioambiental, comentada neste trabalho, mostrou-se válida para os objetivos de aprendizagem da matemática vinculada a cultura do aluno e a sua formação cidadã. Além disso notamos, como apresentado acima, aproximações aos oito princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica, segundo Moreira (2000). Dessa forma, destacamos que a Modelagem Matemática no âmbito da EMC pode contribuir para uma Aprendizagem Significativa Crítica, corroborando com Silva, Kato e De Paulo (2012).

2.5. Considerações finais

Acreditamos que é urgente pensarmos na formação mais ampla e cidadã dos jovens, no sentido de dar oportunidades de refletirem e tomarem consciência sobre temas importantes, como esse da problemática do lixo, para que eles se comprometam em ações conscientes de participação e transformação na sociedade. A disciplina de matemática não deve se abster desse compromisso, visto que ela pode dar várias respostas na investigação dos problemas do cotidiano e fundamental, por meio desses resultados, algumas ações de intervenção na realidade. Os resultados da modelagem discutidas nesse artigo, por exemplo, além de justificar a compra de coletores para compactar os copos favorecendo a redução do volume de lixo e dos sacos plásticos, conscientizou os alunos sobre o uso irresponsável dos copos descartáveis.

Tendo em vista todas essas possibilidades que a Modelagem Matemática pode gerar no ambiente da sala de aula, consideramos que com um pouco de esforço do professor, é possível, na escola que temos hoje, aplicar metodologias de ensino que atendam a essas teorias educacionais tão ricas e tão verdadeiras, mas que muitas vezes ficam somente no papel.

Motivadas a seguir planejando outras aulas investigativas relacionadas a temas relevantes para os alunos, constatamos que a pesquisa contribuiu não só com a aprendizagem dos estudantes, mas também com o crescimento profissional das professoras idealizadoras da proposta.

2.6. Referências

ALMEIDA, L. M. W. ; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. In: ALMEIDA, L. M. W. ; SILVA, K.A. P. Modelagem matemática em foco. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna Ltda, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma educação matemática crítica: a modelagem matemática como alternativa. Educação Matemática e Pesquisa, v.12, n.2, p.221-241, 2010.

ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

_____. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. Alexandria, v.2, n.2, p. 55-68. 2009.

BARBOSA, J. C.. Modelagem Matemática e a perspectiva socio-crítica. In: Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática. 2003.

_____. Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. Educação Matemática em Revista, Brasília, ano 14, n. 26, mar. 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/revista14_26.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2016.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BLUM, W. Can Modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In: KAISER, Gabriele et al. (Ed.). Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14. New York: Springer, 2011. p. 15-30.

BURAK, D. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas, Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. Revista de Modelagem e Educação Matemática, v.1, n1, p.10-27, 2010.

CEOLIM, A. J.; HERMANN, W. Entrevista – Ole Skovsmose e sua Educação Matemática Crítica. RPEM – Revista Paranaense de Educação Matemática. Campo Mourão, v.1, n.1, jul./dez. 2012.

D' AMBRÓSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. São Paulo: Papirus, 2012.

FIorentini, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

LIMA, E. L. et al. Temas e Problemas. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática)

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa Crítica. In: MOREIRA, M. A. et al. (Orgs.). Teoria da aprendizagem significativa. Peniche, Portugal, p. 121-134, 2000. (Contributos do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa).

ROSA, P. R. da S. Uma introdução à pesquisa qualitativa em Ensino de Ciências. Campo Grande: UFMS. 2013. 172 p. Disponível em: http://www.paulorosa.docente.ufms.br/Uma_Introducao_Pesquisa_Qualitativa_Ensino_Ciencias.pdf Acesso em: 20 dez. 2016.

SKOVSMOSE, O. Educação Matemática crítica: A questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. 160 p.

SILVA, C. da; KATO, L. A.; DE PAULO, I. J. C. A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações. Investigações em Ensino de Ciências, v. 17, n.1, p. 109-123, 2012. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID281/v17_n1_a2012.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2017.

SOARES, M. R; JUNIOR, G. S.; PILATTI, L. A; SILVA, S. C. R. Modelagem Matemática: aplicações das funções exponenciais em um curso de Tecnologia. Experiências em Ensino de Ciências, Ponta Grossa (PR), v. 9, n.3, p.59-69, 2014. Disponível em: http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID254/v9_n3_a2014.pdf Acesso em 10 dez. 2015.

3. APLICAÇÃO DA SEGUNDA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1. Modelagem matemática em uma atividade investigativa em trilha ecológica

Gislaine M. Ferreira Matos⁴

Mirley Luciene dos Santos⁵

Roberto Barcellos⁶

RESUMO: A Modelagem Matemática tem sido amplamente discutida no âmbito da Educação matemática como metodologia capaz de contribuir com a formação dos alunos em competências intelectuais amplas, como saber questionar, investigar e tomar decisões. Interessados em investigar uma proposta pedagógica capaz de gerar na sala de aula um espaço para a pesquisa e a reflexão, buscamos a Modelagem Matemática como metodologia de ensino em uma atividade de investigação matemática em trilha ecológica. Os dados da pesquisa foram coletados com alunos da segunda série do ensino médio de uma escola pública, por meio da atividade extraclasse e das aulas regulares subsequentes a visita a trilha. O envolvimento dos alunos na delimitação das hipóteses e nas fases de pesquisa; as reflexões sobre quais decisões tomar e a preocupação em intervir positivamente na realidade, nos sinalizou aprendizagens para a formação para a cidadania e participação crítica e reflexiva na sociedade.

Palavras chave: Metodologia de Ensino. Ensino Médio. Educação pela Pesquisa.

⁴ Mestranda em Ensino de Ciências, Universidade Estadual de Goiás/UEG, gisamferreir@gmail.com

⁵ Doutora em Ecologia, Universidade Estadual de Goiás/UEG, mirley.santos@ueg.br

⁶ Referência Roberto

3.2. Introdução

Como consequência da filosofia ocidental desde Descartes, as práticas educativas das culturas ocidentais da atualidade priorizam o intelecto, valorizando a memorização de conhecimentos em detrimento de um saber/fazer mais dinâmico e participativo. Esse fato é analisado por D'Ambrósio (2012) ao contestar a perspectiva da educação matemática que trata teorias de aprendizagem como sistemas de massa com seus objetivos, métodos e conteúdos preestabelecidos.

Skovsmose (2001), afirma que a matemática desempenha papel importante na sociedade, visto que muitas representações matemáticas ajudam na tomada de decisões de fatos relevantes. Também D'Ambrósio (2012) comenta que existem infinitas possibilidades de temas do cotidiano que podem ser tratados em aulas de matemática, onde o professor tem uma gama de temas de acordo com o cotidiano e o interesse dos alunos. Também D'Ambrósio (2012), atesta a necessidade de uma formação mais ampla dos alunos, extrapolando a mera instrução intelectual dos mesmos.

Acreditamos que essa preparação cidadã e global dos estudantes, passe por uma aprendizagem por meio de atividades de protagonismo, de pesquisa, investigação e reflexão na escola. No entanto, muitas são as limitações para essa formação dos alunos. No que corresponde à disciplina de matemática, pontuamos dificuldades como a falta de temas contextualizados nos livros didáticos; o engessamento do currículo e a falta de um ambiente propício para aulas mais investigativas.

A Modelagem Matemática tem sido amplamente discutida no âmbito da Educação matemática como metodologia capaz de contribuir para fazer do processo de ensino e aprendizagem de matemática algo que ultrapasse o aspecto teórico formal, alcançando a formação de competências intelectuais mais amplas, onde os alunos são motivados a investigar e buscar sempre o conhecimento (BURAK, 2010).

Interessados em investigar uma proposta pedagógica capaz de gerar na sala de aula um espaço para a pesquisa e a reflexão, buscamos a Modelagem Matemática como metodologia de ensino para atividades de investigação matemática em trilha ecológica.

Constitui-se, portanto, questionamento dessa pesquisa, entender quais as contribuições da atividade em trilha ecológica, pautada na Modelagem Matemática, para a formação de competências de pesquisa e investigação nos alunos do ensino médio.

Utilizamos, para tanto, os referenciais da Modelagem Matemática e das perspectivas educacionais sobre educar pela pesquisa de Demo (2003) e sobre Investigações Matemáticas em Ponte (2003) e Skovsmose (2001).

Os dados da pesquisa foram, portanto, coletados com alunos da segunda série do ensino médio de uma escola pública, por meio da atividade extraclasse e das aulas regulares subsequentes à visita a trilha. Alguns dos alunos tinham passado por uma primeira experiência com a Modelagem Matemática no ano anterior, no entanto, a maioria da turma estava vivenciando pela primeira vez uma atividade educativa nesses moldes.

Com a participação dos estudantes na investigação matemática da trilha, com seus registros escritos e representados em maquetes, buscamos descrever os indícios de contribuição da Modelagem Matemática para aprendizagens investigativas e reflexivas dos conhecimentos matemáticos envolvidos e/ou de outros interdisciplinares ou transdisciplinares.

3.3. A Modelagem Matemática como Ambiente de Pesquisa e Investigação no Ensino de Matemática

Ao propor a Educação por meio da Pesquisa, contrapondo o ambiente tradicional das escolas de treinar e impor o conhecimento pronto, Demo (2003) afirma que a pesquisa pode ser uma atitude cotidiana, não algo feito só por doutores, basta que para isso se adapte ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. O autor afirma que o processo da pesquisa inicia motivando o aluno a saber questionar, a propor pesquisas, a buscar e a interpretar dados e a encontrar fontes.

Esse deve ser um processo em que o estudante abandona o papel de objeto e assume o de sujeito, aquele que trabalha e contribui para reconstruir o conhecimento, numa atitude de *questionamento reconstutivo*. Questionamento, fundamentado pela formulação e realização de projetos próprios por parte dos alunos, aproveitando o que já trazem como identidade cultural e reconstrução pelo ato de inovar ou de interpretar de uma forma própria, envolvendo o saber pensar e o saber aprender (DEMO, 2003).

Ponte (2003) também defende a aproximação dos processos de pesquisa e investigação aos processos de ensino e de aprendizagem. O autor afirma que o saber investigar é uma aprendizagem imprescindível para todas as pessoas e, portanto, a escola deve desenvolver competências não só de conhecimentos específicos, mas também a capacidade de usá-los em processos de situações concretas aplicando as ideias e conceitos matemáticos para atuar reflexiva e criticamente em situações da vida.

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem caracteriza-se por criar um ambiente onde os alunos são convidados a questionar e a investigar, por meio da matemática, situações de outras áreas do conhecimento (Bassanezi, 2002; Barbosa, 2009). Diferente de apenas resolver uma situação-problema já estabelecida, as atividades com modelagem começam com os alunos ajudando na escolha do tema de investigação e seguem com procedimentos de pesquisa (ALMEIDA; VERTUAN, 2014).

Esses procedimentos, conhecidos como fases ou etapas da modelagem, podem ser diferentes segundo as abordagens de como a modelagem é entendida e segundo a complexidade do problema investigado (BORROMEU, 2006). Adotamos as descrições de Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), que apresentam essas etapas em cinco momentos:

1) determinar a situação; 2) simplificar as hipóteses dessa situação; 3) resolver o problema matemático decorrente; validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real e finalmente, 5) definir a tomada de decisão com base nos resultados (MEYER, CALDEIRA E MALHEIROS, 2013, p.28).

Poderíamos sintetizar esses cinco momentos em etapas de um ciclo de modelagem, como descrito no esquema da figura 1.



Figura 10 – Fases da Modelagem
Fonte: Acervo pessoal dos autores

Esse ciclo de modelagem resume a forma como entendemos os caminhos de uma atividade de Modelagem na sala de aula. Partindo de uma situação do cotidiano dos alunos, inicia o processo de pesquisa buscando abstrair um problema matemático e simplificar as hipóteses. Depois de delimitado o problema e colhidas as informações necessárias, inicia a fase

de resolução e a socialização dos resultados encontrados. Nessa conclusão da modelagem, obtém-se o resultado ao problema inicial que será os fundamentos para ação e intervenção na situação inicial (BARBOSA, 2009).

Podemos observar nesse caminho da Modelagem espaços para formulações, coleta de dados, reflexões e para a tomada de decisões. Lopes e Costa (2015) destacam essas potencialidades da Modelagem como metodologia relacionada a pesquisa e a investigação e afirmam que ao direcionar o estudante ao local da situação-problema, instigando-o a buscar do conhecimento, prepara os alunos para aplicarem essas competências em distintas circunstâncias da vida.

3.4. Descrição e Avaliação da Atividade de Modelagem Matemática

Tendo conceituado como seria entendida a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem nas aulas do ensino médio e por quais caminhos seriam conduzidas as etapas do processo de investigação, buscamos um tema para a atividade que atendessem aos objetivos iniciais de formação investigativa e reflexiva dos alunos e também como o intuito de trabalhar a Trigonometria no Triângulo Retângulo, por ser o conteúdo a ser desenvolvido naquele momento.

A proposta da atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em quatro partes: a) problematização e elaboração dos instrumentos de coleta dos dados, onde foi dialogado sobre as hipóteses de pesquisa e confeccionados os materiais de coleta de dados; b) pesquisa e coleta de dados na trilha interpretativa da Universidade Estadual de Goiás; c) exploração dos dados e resolução do problema, constituída pelo tratamento dos dados e formalização dos conhecimentos matemáticos com socialização dos resultados d) a construção da maquete da trilha.

3.4.1. 1ª Parte: Problematização e a elaboração dos instrumentos de coleta de dados

A primeira etapa se deu numa sequência de três aulas destinadas a apresentação da proposta, a problematização da atividade e à confecção dos instrumentos que seriam utilizados na coleta de dados.

A professora fez uma visita antes à trilha acompanhada dos biólogos instrutores dos projetos de Educação Científica, a fim de conhecê-la e analisar as investigações matemáticas possíveis. Um ponto importante explicado pelos biólogos foi o de que as matas se dividem em setores de características bem marcadas, chamadas fitofisionomias. A Trilha do Tatu possui portais que dividem esses setores e foi decidido então propor aos alunos representar a trilha em

relatórios, desenhos ou maquetes, obedecendo as proporções e as características principais de cada um de seus trechos.

Um ponto que diferencia uma fitofisionomia de outra é o tipo de vegetação e, portanto, seria necessário coletar as medidas das árvores de cada trecho. Esse seria um ponto onde poderia ser trabalhado a trigonometria. Além disso, alguns elementos da estrutura da trilha como os portais, os corrimões de um mirante e a escada de acesso ao córrego poderiam ser medidos e desenhados para serem reproduzidos na descrição dos elementos principais da Trilha do Tatu.

Assim, depois desse reconhecimento do ambiente de pesquisa, a professora levou pronta uma parte da proposta, sendo que a delimitação total da situação-problema, com os objetivos e as estratégias de resolução foram pensadas e realizadas em conjunto, alunos e professora. Esse momento aconteceu na primeira aula, onde foi decidido confeccionar maquetes e também fazer a análise da trilha a partir de três pontos de observação, como roteiro para a atividade de campo.

1. *Analisar matematicamente a trilha em seus aspectos*
2. *Colher as principais características dos trechos da trilha, como altura média da vegetação (utilizar o teodolito confeccionado para tirar os dados necessários para se medir uma altura inacessível de uma árvore)*
3. *Fazer um esboço do formato dos portais, dos bancos, da escada e do deck, observando o tamanho de cada lado e os ângulos formados por eles.*

Foi gerado nessa aula um espaço de participação democrática entre a professora e os alunos e a notícia de que iriam visitar uma trilha ecológica para uma atividade de matemática, os encantou muito, levando-os a se envolverem no planejamento da atividade com motivação e entusiasmo. Essa aula foi uma oportunidade de gerar espaço para o *questionamento* proposto por Demo (2003), caracterizado pelo espaço para a formulação de projetos próprios por parte dos alunos.

As duas aulas seguintes foram destinadas à confecção de um teodolito caseiro que seria usado para, a partir dos conhecimentos sobre trigonometria no triângulo retângulo, medir alturas inacessíveis das árvores maiores e dos portais da trilha. Foi pedido para os alunos levarem os materiais necessários (barbante, transferidor, tubo transparente de caneta e uma borracha).



Figura 11 – Teodolito caseiro construído pelos alunos
 Fonte: Acervo pessoal dos autores

A professora apresentou o teodolito como instrumento de medida de ângulos e os instruiu nos passos para construir modelo um caseiro, utilizando os materiais levados por eles. Depois como os teodolitos prontos, foi explicado que ao inclinar para ver algo acima da altura dos olhos, o peso preso no barbante ajuda-o a marcar no transferidor o ângulo percorrido nesse movimento, sendo, portanto, o ângulo de visão desse ponto como mostrado na figura 12. Com a medida desse ângulo e sabendo a distância entre o objeto e o observador é possível medir a altura desejada do objeto, por meio da relação trigonométrica da tangente de um ângulo (Veja proposta semelhante na URL: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635>).

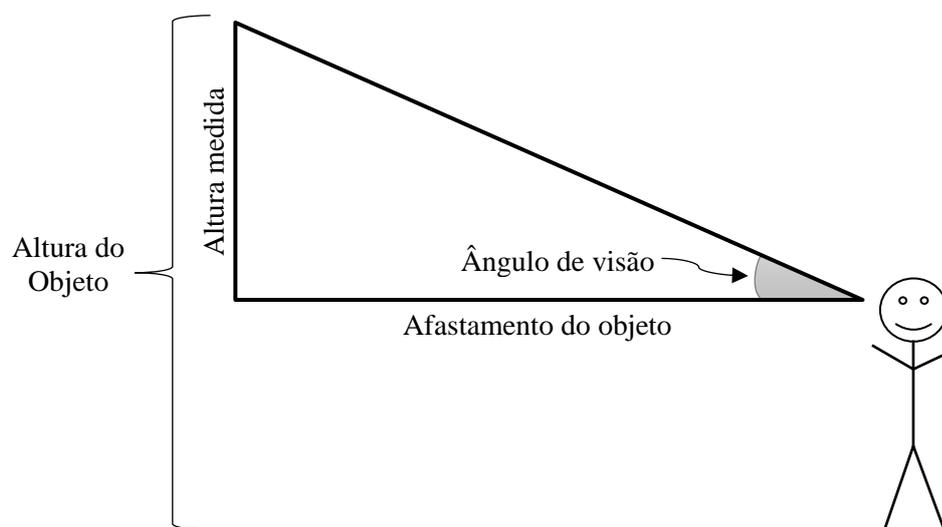


Figura 12 – Aplicações das relações trigonométricas
 Fonte: Acervo pessoal dos autores

Essa parte da atividade, encerrou-se com a revisão sobre as relações trigonométricas. Segundo o programa de matemática para o Ensino Médio do Estado de Goiás, esse conteúdo é introduzido na primeira série e entra novamente como conteúdo da segunda série. Assim, os

alunos já possuíam uma noção inicial do assunto e puderam com essa atividade e com as etapas de investigação seguintes, fixar esse conhecimento matemático. Dessa forma, foi trabalhada a etapa que no ciclo da Modelagem chamamos de **Situação não matemática** e também trabalhamos alguns passos iniciais da etapa chamada **Pesquisa**.

3.4.2. 2ª Parte: A Pesquisa e Coleta de Dados

A visita à trilha ocorreu no período matutino, no próprio turno de aulas da turma. Antes de fazerem o percurso, passaram por uma breve apresentação sobre o Bioma Cerrado, explicando sobre as diferentes fitofisionomias e sobre os portais que as delimitam. Os vinte e seis alunos presentes foram, então, separados em três grupos, cada um responsável por descrever um dos três trechos, sendo eles o Cerrado Stricto Senso, a Mata Seca e a Mata de Galeria.



Figura 13 – Miniaula no laboratório de Biodiversidade do Cerrado - UEG

Fonte: Acervo pessoal dos autores

Os alunos foram conduzidos para a trilha e cada grupo se concentrou em colher os dados do setor que os correspondiam. Cada grupo tinha suas trenas, os teodolitos confeccionados por eles e um diário de bordo para o registro dos dados. Assim, foram medindo elementos que consideravam importantes, anotando características dos trechos e registrando por meio de fotografias.



Figura 14 – Visita à Trilha do Tatu e coleta dos dados
Fonte: Acervo pessoal dos autores

A professora acompanhou os grupos, indicando os pontos importantes de observação e ajudando-os a utilizar o teodolito para medir as árvores e os portais. Essa atividade experimental de lidar com a necessidade de medir alturas inacessíveis foi crucial para os alunos reconhecerem a utilidade do conhecimento matemático envolvido nessa situação. Diferente de ler uma aplicação da matemática em uma situação-problema do didático, eles puderam constatar-la em um ambiente natural (BURAK, 2010)



Figura 15 – Usando o teodolito e fita métrica para coletar dados
Fonte: Acervo pessoal dos autores

As medidas dos ângulos feitas no teodolito, as medições feitas com a trena, os desenhos e todos os registros dos elementos da trilha constitui material de análise para posterior confecção das maquetes. Os alunos se mostraram ativos nesse processo de coleta dos dados, tendo participado como sujeitos do processo, atribuindo significado ao conhecimento pelos seus próprios meios (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2013).



Figura 16 – Registro dos dados no diário de bordo
Fonte: Acervo pessoal dos autores

Já no final da visita, no caminho de saída da trilha, os alunos encontraram um pedaço grande de plástico envolvido por fezes de animais. Nesse momento a bióloga da UEG que guiava os alunos, fez uma pausa na caminhada para explicar aos alunos que aquelas eram fezes de um animal que havia ingerido aquele plástico. Isso gerou um momento de diálogo sobre a importância de não poluir o meio ambiente, criando um espaço de aprendizagem e reflexão transdisciplinar porque não tratou-se de aprendizagem sobre matemática ou biologia, etc. Mas sim de despertar para consciência de respeito por todos os seres e pela natureza de forma geral (D'AMBRÓSIO, 2009).

Assim, ao encerrar a visita à Trilha do Tatu finalizamos a etapa que no ciclo da Modelagem chamamos de **Pesquisa**.

3.4.3. 3ª Parte: Exploração dos dados e resolução do problema

Ao retornar da trilha, foi feita uma socialização para a discussão e reflexão com os alunos sobre o planejamento da construção da maquete, onde eles foram incentivados a fazerem um projeto com os cálculos necessários para encontrar as alturas das árvores e dos portais e para estimarem qual seria a escala utilizada no trabalho.

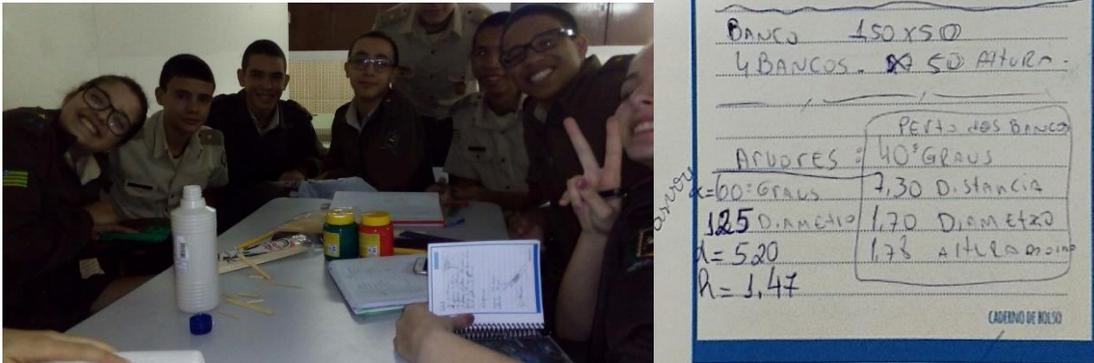


Figura 17 – Planejamento da construção da maquete a partir dos dados coletados!

Fonte: acervo pessoal dos autores

Foram destinadas aulas seguintes para esse trabalho, onde a professora foi passando por cada grupo orientando como utilizar as medidas dos ângulos obtidas como o teodolito e as medições realizadas também com a trena. Foi nesse momento que a professora voltou a falar das relações trigonométricas no triângulo retângulo, enfatizando a tangente do ângulo como ferramenta para medir alturas inacessíveis. Nessas aulas tentamos envolver a fase da modelagem que chamamos de **Resultado/ Socialização**.

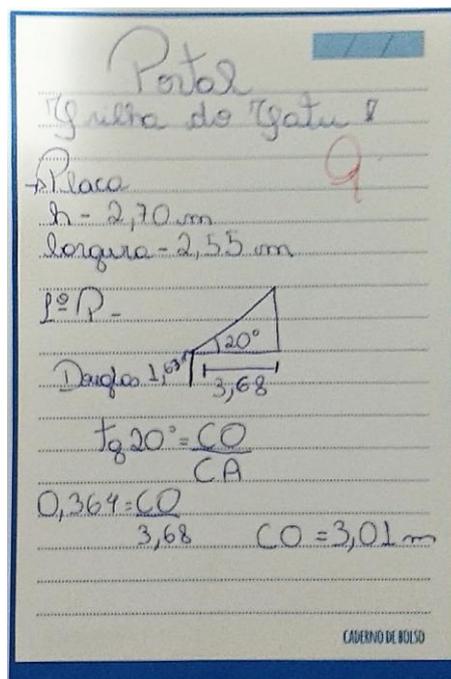


Figura 18 – Utilizando a tangente para calcular a altura de uma placa

Fonte: acervo pessoal dos autores

No entanto, apenas alguns alunos de cada grupo se preocuparam em aprender o conteúdo matemático envolvido na atividade, sendo que a maioria ficou motivada apenas pelo trabalho manual de fazer a maquete e acabaram se dispersando. Essa dispersão não foi contornada pela professora devido à complexidade de orientar tantos alunos em um modelo de aula diferente do modelo tradicional. Blum (2011), fala dessas dificuldades que os professores encontram em propor atividades de modelagem, destacando também que a imprevisibilidade gerada nessas tornam a modelagem difícil para alunos e professores e isso constitui as causas principais da Modelagem Matemática ser pouco utilizada nas escolas.

Outro fato importante observado foi a insegurança dos alunos quanto ao conteúdo estudado nas atividades investigativas. Quando a professora disse que cairia na prova questões parecidas às envolvidas na atividade prática, os alunos desesperaram e pediram uma aula expositiva de revisão com a resolução de exercícios no quadro.

Nossa sugestão para buscar resolver esse problema, na busca de ajudar na aprendizagem matemática de todos os alunos, seria a de separar os alunos em grupos menores para garantir a participação de todos e contar também com monitores que pudessem ajudar o professor a acompanhá-los mais de perto na fase de matematização e resolução da situação-problema.

3.4.4. 4ª Parte: A construção das maquetes e apresentações do trabalho

Com o planejamento de quais características seriam apresentadas na maquete, tendo o registro dos dados e o resultado obtido no cálculo das alturas das árvores e dos portais, os alunos partiram para a construção. Precisavam, para tanto, definir qual a escala utilizar a fim de representar proporcionalmente cada trecho e fitofisionomia da trilha.

Os próprios alunos constataram que não poderiam adotar uma escala aleatoriamente, que precisariam planejar baseados na relação do tamanho real com o tamanho da maquete, podendo escolher a dimensão de qualquer elemento como parâmetro. Pensaram que poderiam relacionar, então, o comprimento do isopor que usariam de base com o tamanho total do trecho da trilha, gerando assim a razão para definir a escala.

Foi um dos grupos que fez essa sugestão e observação e a professora aproveitou para discutir com os alunos os conhecimentos matemáticos de Razão, envolvidos nessas análises. Destacamos esse momento como um dos mais significativos, pois os alunos envolveram seus conhecimentos matemáticos prévios para resolver o problema em questão e principalmente por ter englobado desenvolvimento de competências de reflexão, raciocínio e socialização do conhecimento.

Depois de todos terem aceitado essa estratégia de resolução, a professora levou para a sala um mapa da trilha para que os alunos pudessem verificar a extensão dos trechos correspondentes a seus grupos. Fazer a leitura do mapa poderia ter sido melhor explorado pela professora como desenvolvimento de muitas habilidades matemáticas, mas restavam poucas aulas das disponíveis para o projeto e os alunos acabaram fazendo uma análise superficial, decidindo pela escala 1:50 que na verdade não foi corretamente aplicada na construção de cada elemento da maquete.

Assim, embora a discussão inicial sobre a escala tenha sido muito produtiva, não foi possível integrar esse conhecimento para resolver o problema prático de proporção. Novamente constatamos a dificuldade na aprendizagem matemática, devido à complexidade da resolução de um problema real e a falta de tempo disponível.



Figura 19 – Maquete pronta
Fonte: Acervo pessoal dos autores

Os alunos terminaram os detalhes da maquete em casa e levaram para a aula final do projeto, onde fizeram uma apresentação do trabalho e participaram de um momento de avaliação da participação em toda as etapas da atividade. Os alunos se mostraram muito interessados em que o resultado de suas pesquisas e resoluções tivessem alguma utilidade que extrapolassem a atividade em si. A professora combinou com eles que levaria as maquetes para o laboratório, a fim de que fossem observadas pelos alunos envolvidos em outras atividades relacionadas à trilha ecológica da UEG. Essa atitude dos alunos, reforça a necessidade da fase da Modelagem que chamamos de **Ação/Intervenção**.



Figura 20 – Exposição das Maquetes no Laboratório de Biodiversidade - UEG
 Fonte: Acervo pessoal dos autores

A professora comentou sobre alguns pontos relevantes no processo de realização do projeto, a fim de conduzir uma breve entrevista coletiva. As falas dos alunos foram registradas e a fim de tecermos alguns comentários sobre a avaliação da atividade por parte dos alunos. Transcrevemos alguns deles a seguir, citando apenas a inicial dos nomes de cada aluno:

Aluna A: A atividade na trilha nos aproximou mais do contato com o pesquisador, nos sentimos matemáticos ... bem diferente de estudar de forma afastada da realidade.

Aluno P: Gostei da experiência, da noção do que um engenheiro faz.

Aluna J: Eu achei interessante a utilidade da matemática para ajudar a medir as alturas.

Aluna V: Achei que aprendemos com a convivência no trabalho em grupo. Ter que ter paciência com os meninos que não participavam direito e confiança que a maquete ia dar certo... a questão de quem definia as coisas no grupo também fez a gente aprender sobre liderança.

Aluno H: Eu nunca tinha visto escala em atividades na prática, sempre vejo nas aulas de geografia... gostei de entender melhor numa situação que íamos precisar usar.

A fala da aluna A e do aluno P mostram como a Modelagem proporcionou aos alunos ambiente da Pesquisa e aproximação às Ciências, sinalizando a necessidade de uma maior utilização de atividades investigativas na escola. tornam o processo participativo e a imagem

do cientista deixa de ser visualizada como impotente e inalcançável (LEHNEN, MADRUGA, 2013).

A fala do Aluno H, mostra a importância de não apenas falar sobre as aplicações dos conhecimentos disciplinares, senão levarem-nos a vivenciar de forma experimental para, assim, conseguirem aplicar em situações futuras. Essa é a contribuição das investigações matemáticas, a capacidade de saber aplicar os conhecimentos matemáticos em situações da vida, atuando reflexiva e criticamente (COSTA, LOPES, 2003).

Os comentários da Aluno V nos mostraram que as atividades em grupo, as propostas de projetos envolvendo outras habilidades fora dos domínios disciplinares, ajudam muito na formação cidadã dos alunos. Aprender a conviver, a liderar ou ser liderado e a respeitar os colegas em suas individualidades é imprescindível para os alunos e as aulas de matemática devem também proporcionar o desenvolvimento de competências transdisciplinares como essas (D'AMBRÓSIO, 2009; 2012).

3.5. Considerações finais

Tendo caracterizado algumas particularidades da educação por meio da pesquisa e da investigação oportunizadas pela Modelagem nas aulas de matemática, podemos afirmar que o envolvimento dos mesmos na delimitação das hipóteses, a participação atenta nas fases de pesquisa, as reflexões sobre quais decisões tomar para escolha da escala da maquete e a preocupação em tornar as maquetes úteis para outras atividades, são indícios do desenvolvimento do questionamento, da busca pelo conhecimento, da tomada de decisão e comprometimento por intervir positivamente na sociedade.

As dificuldades em proporcionar uma aprendizagem dos conteúdos matemáticos de maneira efetiva foram notadas, no entanto, nosso objetivo não era a mera aprendizagem do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. Tendo almejado contribuir com a aprendizagens mais amplas de formação para a cidadania e participação crítica e reflexiva na sociedade, concluímos que nossos objetivos foram alcançados. Obviamente não descartamos a necessidade da aprendizagem matemática, apenas não a consideramos mais importante que o saber pesquisar e refletir, porque com essas competências os alunos facilmente saberão buscar fontes de conhecimento, aprenderão a aprender (Demo, 2003).

Corroboramos, portanto, com vários pesquisadores da Educação Matemática, como D'Ambrósio (2009), Skovsmose (2001), (Burak, 2010) e Freitas (2016) ao defenderem que a necessidade da Educação Matemática deve expandir sua meta para o desenvolvimento de

competências de formação global dos estudantes, ultrapassando a mera e impositiva formação de conteúdos matemáticos.

3.6. Referências

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; Silva, K.A. P. *Modelagem matemática em foco*. Rio de Janeiro: ed. Ciência Moderna Ltda, 2014.

BARBOSA, J. C. Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, Brasília, ano 14, n. 26, mar. 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/revista14_26.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2016.

BASSANEZI, R. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BORROMEO, F., Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem e Educação Matemática*, v.1, n.1, p.10-27, 2010.

COSTA, A. B., LOPES, T. B. Uma proposta de Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem de Matrizes. *Revista do professor de Matemática Online SBM*, v.3, n.1, 2015. Disponível em <<http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v003-n001-costa-e-lobes.pdf>> Acesso em jun. 2017.

D' AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus, 2012.

_____, Ubiratan. *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Ed. Palas Athena, 2009.

DEMO, P. *Educar pela Pesquisa*. Campinas: Autores Associados, 2003. (Coleção educação contemporânea).

FREITAS, W. S. *A Construção de um Ambiente de Modelagem Orientado na Perspectiva Da Educação Matemática Crítica e suas Vozes Conflitantes*. In XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, *Anais...* São Paulo, 2016.

LEHNEN, C. A.; MADRUGA, Z. E. F. Modelagem Matemática e construção de maquetes: relato de uma prática do curso de licenciatura. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. ULBRA, Canoas Rio Grande do Sul, 2013.

MALHEIROS, A. P. S. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 861-882, ago. 2012

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, João P.; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. 3 ed. ver. ampl., Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P. M. DA. Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat, p. 25–39, Lisboa, 2003. 1 CD-ROM.

SKOVSMOSE, O. Educação Matemática crítica: A questão da democracia. Campinas,SP: Papirus, 2001. 160 p.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA PESQUISA

Tendo estudado autores clássicos e integrado reflexões importantes da Educação Matemática; tendo aprendido com vários pesquisadores modernos as propostas de sucesso para o ensino de matemática da educação básica, finalizo essa pesquisa segura do crescimento intelectual e profissional.

Por muitos anos, o meu desejo de pesquisar propostas educativas de matemática mais eficientes quanto a aprendizagem dos estudantes do ensino médio, não passou de fantasias. Isso porque as exigências da atuação profissional de um professor da educação básica, muitas vezes nos impedem de realizar mudanças efetivas na nossa prática e seguimos por muitos anos atendendo apenas aos protocolos exigidos, sem nenhuma atuação para resolver os problemas no ensino e na aprendizagem, os quais nos deparamos cotidianamente.

O aprofundamento teórico e prático nas atividades de Modelagem Matemática, me levou a admiti-la como metodologia capaz de gerar ambientes de aprendizagem por meio da pesquisa, da investigação, da tomada de decisões sobre os temas relevantes para a sociedade e para os alunos. E nesse ponto, constatei que ela pode oportunizar aos alunos uma formação cognitiva ampla, cidadã e transdisciplinar.

Ter aplicado os temas de Modelagem elaborados me ajudou a prever possíveis encaminhamentos para futuras aplicações das atividades de Modelagem que formaram o conteúdo do produto educacional. Dessa forma, ele se constitui no resultado concreto da minha pesquisa porque trata da síntese das minhas compreensões e constatações sobre as possibilidades de aplicar a Modelagem Matemática no Ensino Médio.

Embora tendo constatado as possibilidades da Modelagem Matemática para o Ensino Médio, também encontrei muitas dificuldades de aplicá-la em aulas regulares de matemática. A maior e, talvez a geradora de vários outros obstáculos, foi a falta de apoio por parte das instâncias superiores da rede estadual de educação, partindo dos níveis mais altos, inacessíveis a nós professores, até as direções das escolas. Há um distanciamento entre o que é desenvolvido nas pesquisas educacionais e o que é entendido como metodologias reconhecidas como válidas para utilização nas escolas.

Portanto, reconheço nesse trabalho, o estágio inicial da compreensão da Modelagem como metodologia aplicável e eficaz para aulas de matemática no ensino médio em escolas públicas, mas estou certa que melhorarei minha compreensão a cada dia na aplicação das aulas e no estudo de novas pesquisas nessa área.

PROPOSTAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Gislaine M. Ferreira Matos

INTRODUÇÃO

Mesmo com mais de 30 anos de história no Brasil, a modelagem é desconhecida de muitos professores da educação básica e muitos dos que a conhecem não a veem como metodologia possível para as aulas de matemática do ensino médio. Mas, muitas são as experiências e os estudos nessa área, mostrando sua aplicabilidade e seu potencial de criar um espaço de aprendizagem significativa para os alunos.

Tendo conhecido a Modelagem Matemática nas minhas pesquisas para monografia na graduação, encantei-me pela proposta, mas não via exemplos próximos da realidade de aplicações no ensino básico e por isso não conseguia encontrar uma forma de utilizá-las em sala de aula. Mas não deixei de acreditar na metodologia como uma possibilidade para melhorar minha prática e continuei pesquisando. Quando surgiu a oportunidade de fazer o mestrado, vi como o momento certo para investigar e testar a Modelagem Matemática.

Portanto, a primeira parte deste guia apresenta um pouco da Modelagem Matemática aos professores de matemática da educação básica, buscando criar um conceito simples e prático da Modelagem na Educação Matemática. Discute também, sua capacidade de ser um recurso para as aulas, mostrando exemplos das experiências com as aplicações numa turma de ensino médio.

Mas, para atender a necessidade de seguir o currículo, só é possível utilizar a Modelagem Matemática se os temas de investigação de cada atividade forem elaborados com encaminhamentos para o conteúdo que precisa ser dado. Essa estratégia de ensino seria melhor aplicada se os alunos pudessem escolher o que investigar, mas desse modo não há o controle sobre qual teoria matemática se deparariam no caminho. Para o ensino básico, uma alternativa é trabalhar com temas previamente elaborados e planejados segundo os conteúdos que se queira ensinar aos alunos.

A segunda parte deste guia servirá de aporte também nesse sentido, porque dá algumas sugestões de temas e atividades para as primeiras experiências com Modelagem Matemática. São propostas elaboradas com o intuito de criar um espaço para a investigação nas aulas de matemática e também tem a preocupação de possibilitar o desenvolvimento de alguns conteúdos de álgebra e geometria do ensino médio.

Apresentamos três sugestões para utilização da Modelagem Matemática nas aulas de matemática do ensino médio. Como estamos ainda em fase de elaboração desse produto educacional, pretendemos elaborar outras atividades. Esperamos, portanto, que até a versão final desse Guia, tenhamos mais dois temas de investigação, para assim contemplar todo o conteúdo exigido para a segunda série desse nível de ensino, segundo o currículo proposto pela Secretaria de Educação do Estado de Goiás.

Todas as propostas elaboradas foram também aplicadas e testadas em turmas de ensino médio e esperamos que esse guia sirva para as nossas próximas experiências com a modelagem em sala de aula. No entanto, almejamos principalmente a replicabilidade

desse material, no afã de que possa ser útil aos professores de matemática, principalmente os da rede estadual de educação que ministram aulas de Matemática Aplicada.

5. APÊNDICE

1ª PARTE:

CONCEITUANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

“O acesso a um número de instrumentos e técnicas intelectuais dão, quando contextualizados de forma correta, muito maior capacidade de enfrentar situações e de resolver problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação”.

Ubiratan D’Ambrosio

O QUE É A MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA?

A Modelagem Matemática como estratégia de ensino é uma metodologia que inverte a ordem convencional: expor conteúdo, passar exercícios e mostrar a aplicação, tornando essa ordem muito mais significativa para o aluno ao mostrar primeiro o problema dentro de um contexto e depois, na busca de solucionar o problema, ir caminhando para a teoria.

Imagine se na sua primeira aula de Funções logarítmicas você fosse instigado pelo seu professor a investigar sobre a matemática que existe na música e ao mesmo tempo nos terremotos, antes mesmo de saber que iria aprender logaritmos? Muito mais motivador do que começar tal matéria copiando do quadro a definição e as condições de existência de um logaritmo, não é? E se na sua primeira aula de trigonometria, seu professor te desafiasse a medir, utilizando apenas um transferidor, a altura de um prédio, ou uma grande árvore, mostrando ser possível com a trigonometria? Acredito que seria muito melhor do que decorar as leis de seno e cosseno sem saber de onde vieram e nem para que servem.

Essa é a proposta da Modelagem Matemática, partir de um problema para, por meio dele e da trajetória em busca de resolvê-lo, aprender a matemática e seus procedimentos de resolução de problemas. Os conteúdos aprendidos assim, são vistos pelos alunos como realmente importantes de serem aprendidos, sem contar que todo o trabalho investigativo já é uma formação complementar importantíssima.

Aprendemos durante toda nossa vida estudantil, do ensino fundamental ao superior uma matemática desligada da realidade, ou quando víamos a sua aplicação era depois de ter passado várias aulas nas definições, propriedades, exercícios de fixação de fórmulas, etc. Uma aplicação muitas vezes forçada, que não traduzia a realidade. Apenas inserida ali como ilustração do conteúdo e não com uma problemática real, usando os conhecimentos matemáticos. A Modelagem Matemática consegue ir além de apenas mostrar a aplicação, ela situa o aluno num ambiente onde ele está vendo a matemática acontecer e é por isso que ele tem a oportunidade de aprender de verdade.

Essa metodologia dá uma sequência muito interessante para as aulas de matemática do ensino básico, porque propõe inicialmente a pesquisa e depois a busca de ferramentas na matemática para encontrar as respostas. Por sua vez, gera uma certa incerteza no desenrolar da aula, porque o andamento da mesma dependerá de como e de quais questões serão levantadas pelos alunos. Contudo, mostra ser um processo muito mais dinâmico e com possibilidades para uma construção do conhecimento.

Poderíamos pensar na dificuldade de cumprir com o currículo, mas o professor pode conduzir de forma que as investigações levem a determinado conteúdo a ser aprendido naquele momento. É claro que, além desse conteúdo principal em foco, várias outras áreas da matemática serão envolvidas na pesquisa, como por exemplo, proporções e porcentagem que são muito recorrentes na modelagem de problemas simples. Mas isso

será portanto, uma oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade dentro da própria matemática, enriquecendo ainda mais a aprendizagem dos alunos.

A interdisciplinaridade é uma marca da Modelagem Matemática, já que propõe traduzir problemas de outras áreas do conhecimento para a linguagem matemática. Sendo assim, as atividades de modelagem serão caracterizadas por uma interdisciplinaridade como várias áreas. Aqui mostramos exemplos dentro da biologia, da nutrição, da arquitetura e topografia. Sendo, no entanto, incontáveis as aplicações em outras áreas.

Outro fator muito positivo nessa proposta de ensino e aprendizagem é a contribuição na relação professor-aluno. Ela se transforma para melhor, porque o professor passa a ser um orientador na busca pela construção do conhecimento, o processo sai da tradicional exposição de conteúdos pelo professor e ganha um formato muito mais participativo por parte dos alunos.

Também a relação aluno-aluno se transforma porque os colegas se tornam companheiros de trabalho. A qualidade investigativa das aulas forma para autonomia e protagonismo dos alunos no seu processo de aprendizagem e possibilita um despertar para a cooperação entre eles e não para a competição.

	Aprendizagem via exposição de conteúdos convencional	Aprendizagem via Modelagem Matemática
Aluno	Passivo	Ativo
Professor	Conteudista	Motivador de pesquisas
Aluno-Aluno	Competição	Cooperação
Professor-Aluno	Exposição	Orientação

MODELAGEM E AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

A proposta da Modelagem Matemática para o Ensino Médio está em consonância com as orientações curriculares em seus critérios de conteúdo, metodologias e competências necessárias a desenvolver nos alunos. As orientações curriculares dão ênfase na necessidade de valorizar o raciocínio, priorizar a qualidade do processo e não a quantidade de conteúdos.

A Modelagem Matemática promove uma aprendizagem matemática dentro das situações cotidianas por meio da interpretação, investigação e busca de resolução para as questões levantadas. Nisso encontra seu poder de criar um ambiente de aprendizagem voltado à pesquisa e desperta nos alunos sua capacidade investigativa, sócio-crítica, além de formá-los nas habilidades matemáticas de raciocínio, abstração e generalização.

Embora as orientações curriculares não a citem como um recurso, a Modelagem Matemática atende muito ao que se espera desse nível de ensino. Na verdade, modelagem é utilizada em quase todos os níveis de ensino, mas especialmente nessa fase, onde os alunos indagam tanto pela aplicabilidade do que estão aprendendo, ela constitui um recurso didático excelente.

No quadro abaixo mostramos um paralelo entre a disciplina de matemática no ensino médio e a Modelagem Matemática nos aspectos de proposta, conteúdo, professores e alunos.

	Matemática do Ensino Médio	Modelagem Matemática
O que propõe:	Valorizar o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos; resolver problemas práticos do cotidiano; modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006)	A Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Ela convida os alunos a verem e a aprender matemática nas situações do dia-a-dia e da realidade que os cercam. (BARBOSA, 2003)
Conteúdos	Dar prioridade a qualidade do processo e não a quantidade dos conteúdos.	Conteúdo como ferramenta para resolução da situação

		problema e não como um fim em si mesmo.
O aluno	Sujeito no processo de ensino e aprendizagem.	Participação ativa em todo o processo de pesquisa, elaboração e estudo.
O Professor	Mediador e Facilitador do conhecimento.	Orientador do processo de pesquisa.

2ª PARTE

PROPOSTAS PARA MODELAGEM
MATEMÁTICA ELABORADAS SEGUNDO OS
CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO

*"Ensinar não é transferir conhecimento, mas
criar as possibilidades para sua própria
produção ou a sua construção".*

Paulo Freire

POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA REDE PÚBLICA DE ENSINO

Quando se fala em propostas para a melhoria do Ensino, são pilhas de livros, vários estudiosos e metodologias inovadoras surgindo a cada dia. Mas como professora atuante na Educação Básica compartilho da dificuldade de traduzir essas ideias em ações reais para nossa prática. Destacamos dois motivos para esse distanciamento da teoria à prática; o primeiro é o problema de aplicabilidade, as teorias muitas vezes não chegam nas escolas e ficam apenas nos discursos acadêmicos. O segundo é o problema de incompatibilidade com a realidade, porque geralmente a proposta chega até a escola, mas não tem o tom prático que ajude o professor a encontrar a maneira certa de aplicar em suas aulas.

Tratando-se da disciplina de matemática, encontramos muitas dificuldades em ministrar aulas que alcancem os alunos, quanto aos seus interesses e também sua aprendizagem. Passamos um ano inteiro ensinando e constatamos ao final que os alunos aprenderam muito pouco. Nos sentimos impotentes como profissionais e desanimados por buscar alternativas para resolver os inúmeros obstáculos com os quais nos deparamos cotidianamente nas escolas.

Essa segunda parte do guia tem o objetivo de refletir sobre essas duas dificuldades, buscando respostas para levar essa proposta da Educação Matemática para dentro da escola e dar um suporte para sua aplicação. Esse suporte não quer dizer uma receita única para todos, senão dicas para as primeiras tentativas de aplicação da metodologia e para lidar com as possíveis dificuldades, além dos exemplos de outras experiências com adoção desse recurso.

Como apoio pedagógico disponho uma apresentação da proposta ao professor, um planejamento dessas aulas e uma folha guia para a participação dos alunos. Foi com a consciência dessas nossas dificuldades que busquei transcrever as atividades de Modelagem para que pudessem ser utilizadas por outros professores como apoio didático em sala de aula, na busca por romper com os entraves na promoção de uma educação matemática de qualidade.

O primeiro tema trata da problemática do lixo, numa proposta de trabalho sobre volume de sólidos geométricos. O segundo tema é sobre nutrição dos adolescentes, envolvendo os conteúdos de sistemas lineares. O terceiro e último tema diz respeito a educação ambiental para uma aula sobre trigonometria no triângulo retângulo.

Mais uma vez, ressalto a importância de não adotar as sugestões de atividades como um roteiro de aula. A modelagem, mais que qualquer outro recurso prevê uma liberdade de atuação do professor.

REDUZINDO LIXO COM A MATEMÁTICA

RECICLAR, REDUZIR, REUTILIZAR:
COMO COMPROVAR
MATEMATICAMENTE A
IMPORTÂNCIA DE REDUZIR O
VOLUME DE LIXO?





GUIA DO PROFESSOR



Essa primeira proposta relaciona-se com um tema socioambiental sobre a problemática do lixo, e poderá ser utilizada como introdução ao Cálculo de Volume de sólidos geométricos. Nos tópicos abaixo narro como foi elaborada essa atividade, descrevo algumas dicas para aplicá-la, além de fornecer um possível planejamento das aulas e um roteiro de participação para os alunos.

PROBLEMATIZAÇÃO

Quando se trata de atividades de Modelagem o ponto crucial é a investigação de uma situação problema e a busca por encontrar algumas respostas à ela, utilizando a matemática como instrumento. Por isso as atividades iniciam-se com escolha e delimitação do tema.

Assim, a escolha desse tema passou pelo intuito de considerar o ambiente natural dos alunos e os temas relevantes para eles e depois pela necessidade de atender ao conteúdo programático da turma, que naquele momento era Volume de Sólidos Geométricos.

Inicialmente, buscamos um tema que estivesse presente no ambiente do colégio para que todo o processo de investigação fosse realizado ali mesmo. Buscando encontrar quais problemas se passam no cotidiano escolar, vimos a problemática do lixo, no uso indiscriminado de copos descartáveis e delimitamos uma situação problema:

"Investigar se a compactação de copos descartáveis reduz significativamente a quantidade de sacos de lixo gastos em uma semana no prédio do Colégio Militar Dr. César Toledo. E se for significativa, em quanto tempo retornaria o valor do investimento do suporte de copo, com a economia dos sacos de lixo?"

As competências matemáticas envolvidas na resolução podem ser variadas, não será apenas o conteúdo escolhido inicialmente, sendo que conhecimentos de proporção, porcentagem, unidades de medida serão com certeza presentes. Juntamente a esses citados, encontra-se conhecimentos que transcendem aos matemáticos, como as habilidades de investigação, tomada de decisões e comunicação dos resultados encontrados.

POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS PARA A INVESTIGAÇÃO

No início da atividade, você professor, poderá orientar os alunos sobre o tema geral a ser trabalhado durante a execução das aulas. Comece entregando o material direcionado ao aluno e faça uma leitura com o grupo sobre o tema escolhido. Disponibilizamos na folha

do aluno o texto RECICLAR, REDUZIR, REUTILIZAR: COMO COMPROVAR MATEMATICAMENTE A IMPORTÂNCIA DE REDUZIR O VOLUME DE LIXO? Que pode ser lido em conjunto para a apreensão do tema. Você também pode buscar e utilizar outros materiais relacionados ao tema para desenvolver esta atividade.

Após a leitura, um diálogo com os alunos poderá incentivá-los a pensar de forma crítica sobre os problemas que observam na escola em que estudam. Então quando eles mostrarem os pontos em que pensaram, incentive-os a fazer uma entrevista com os funcionários da escola, sobre a quantidade de sacos usados e sobre a quantidade de retiradas de lixo das lixeiras destinadas aos copos descartáveis.

Algumas perguntas podem ajudar nessa entrevista como :

- a) Quantos copos são usados por dia? b) Quantos sacos de lixo? c) É retirado mais de uma vez por dia? d) Quantos em média por semana? e) Os sacos vazam com o líquido deixado nos copos?

Apresente então a proposta da atividade com a possível delimitação da situação-problema, descrita acima, e deixe-os decidirem como poderão resolvê-la. Acompanhe-os durante todas as etapas, mediando todo o processo, mostrando possíveis caminhos a seguir, desde que a iniciativa seja dos alunos e você atue como um mediador.

Sugestão de vídeo: Biosfera – Reciclagem

<https://www.youtube.com/watch?v=vWOFr8ehK6A>

Esse vídeo é um episódio do programa Biosfera, dedicado a Reciclagem. É mostrado que com milhões de toneladas de lixo sendo produzidas por dia, o reduzir, reciclar e reutilizar tornou-se muito necessário. O episódio mostra que itens como papel, plástico, alumínio, vidro, podem ser moldados para se tornar algo novo, necessitando serem recolhidos devidamente no momento de seus descartes. São apresentados alguns avanços nessas questões, mas destaca-se também que ainda temos muito caminho a percorrer. No vídeo é comentado que a reciclagem é importante para preservar o meio ambiente e também para gerar emprego e lucro.

PLANEJAMENTO DAS AULAS

Proposta: Uma investigação Matemática tratando da redução do lixo.

Eixo Temático: Espaço e Forma

Expectativas de Aprendizagem:

- Saber aplicar as ideias de área e volume dos sólidos para resolver problemas contextualizados.
- Interpretar situações-problema e traçar estratégias de resolução utilizando conhecimentos matemáticos simples, como proporções e porcentagem.
- Valorizar os conhecimentos de geometria espacial, reconhecendo-os como necessários na vida cotidiana.

Conteúdo: Noção Intuitiva sobre Volume de um sólido

(Vários outros conhecimentos podem ser envolvidos, como o de Razão e Proporção, Porcentagem, dentre outros, dependendo do caminho que os alunos percorrerem para a resolução.)

Sugestões para a atividade:

Tenha já preparado, algumas perguntas norteadoras que possam auxiliar o início do diálogo, questões que permitam despertar o aluno para o tema abordado. E para a proposta de uma entrevista com os funcionários responsáveis pela limpeza e organização da escola, você poderá dividir os alunos em grupos de no máximo 5 pessoas, assim poderá observar os alunos tanto de forma individual quanto em grupo durante a realização do trabalho.

Após se organizarem e apresentarem as suas propostas, poderá então introduzir o conteúdo, explicando a noção intuitiva do conceito de volume de um sólido e deixando que os alunos façam uma relação entre o conteúdo exposto e a atividade proposta para a partir desse ponto propor uma solução matemática para o problema. No material do aluno, você encontrará algumas questões a serem resolvidas.

Ao terminarem, peça que os alunos apresentem e compartilhem com os colegas os resultados e conclusões obtidas, o que aprenderam e vivenciaram e o que poderão aplicar no dia a dia de cada um. É importante que eles preencham a avaliação da atividade ao final do material para que assim, você professor tenha um feedback da atividade e possa detectar as dificuldades dos alunos, suas sugestões, opiniões e usar toda essa informação em prol das próximas atividades.

Avaliação: A avaliação da atividade e da participação dos alunos poderá ser feita a partir de três pontos de observação no desenvolvimento cognitivo dos alunos:

1ª – coleta dos dados com as medições das lixeiras e registro correto das informações obtidas na entrevista.

2ª – elaboração da estratégia de resolução do problema, sabendo propor hipóteses e planejar a resolução.

3ª – resolução do problema, socialização do processo de resolução com os colegas e aplicação dos resultados ao problema inicial.

Duração: 5 aulas de 50 minutos cada

RECURSOS

Vídeos; Quadro e Giz; Folha de instrução da atividade; Lixeira e coletor de copos descartáveis; Fita métrica e Calculadora



FOLHA DO ALUNO



RECICLAR, REDUZIR, REUTILIZAR: COMO COMPROVAR MATEMATICAMENTE A IMPORTÂNCIA DE REDUZIR O VOLUME DE LIXO?

Atualmente, cada morador descarta, em média, um quilo de resíduos a cada dia, o que faz com que uma cidade, como a nossa com aproximadamente 400 mil habitantes, produza diariamente 400 toneladas de lixo. Portanto se torna cada vez mais urgente diminuir o volume de lixo e, se cada cidadão contribuir reduzindo o seu, a natureza ficará menos sobrecarregada.

Os programas de conscientização alertam para pequenas atitudes que podem ajudar na redução do lixo. Como por exemplo, substituir copos descartáveis sempre que possível; escolher produtos com menos embalagens; dar preferência às embalagens retornáveis; buscar alternativas para reduzir o peso de seu lixo e reduzir o volume do lixo doméstico, compactando embalagens, caixas, copos e papelão.



REFLEXÃO

Observando o seu ambiente escolar, qual seria uma possível atitude necessária e eficaz para reduzir o lixo produzido por toda a escola?

Queremos, portanto, com essa atividade, investigar e verificar matematicamente se a compactação de copos descartáveis reduz significativamente o volume do lixo e a quantidade de sacos de lixo gastos.



PESQUISA

1. Pergunte para os responsáveis pela limpeza, qual é a média diária de copos descartáveis utilizados no colégio.
Pergunte também quantos sacos de lixo por dia são utilizados para armazenar esses copos.
2. Tire as medidas da lixeira onde se armazenam a maior quantidade de copos.



ATIVIDADES

1. Que argumentos matemáticos poderiam ser utilizados para convencer as pessoas a empilharem copos descartáveis?
2. Como podemos mostrar matematicamente a diferença no volume quando empilhamos e quando não empilhamos os copos? Escreva suas reflexões e mostre os cálculos utilizados.
3. Em um saco de 100 litros, qual a redução percentual no volume, quando empilhamos os copos?
4. Nossa escola não possui coletores de copos descartáveis, mas com a economia de sacos de lixo rapidamente poderíamos obter recurso para a compra. Como podemos calcular o tempo necessário que a economia de sacos de lixo retorna o valor do investimento do coletor de copos?

Escreva suas reflexões e mostre seus cálculos.



DISCUSSÃO

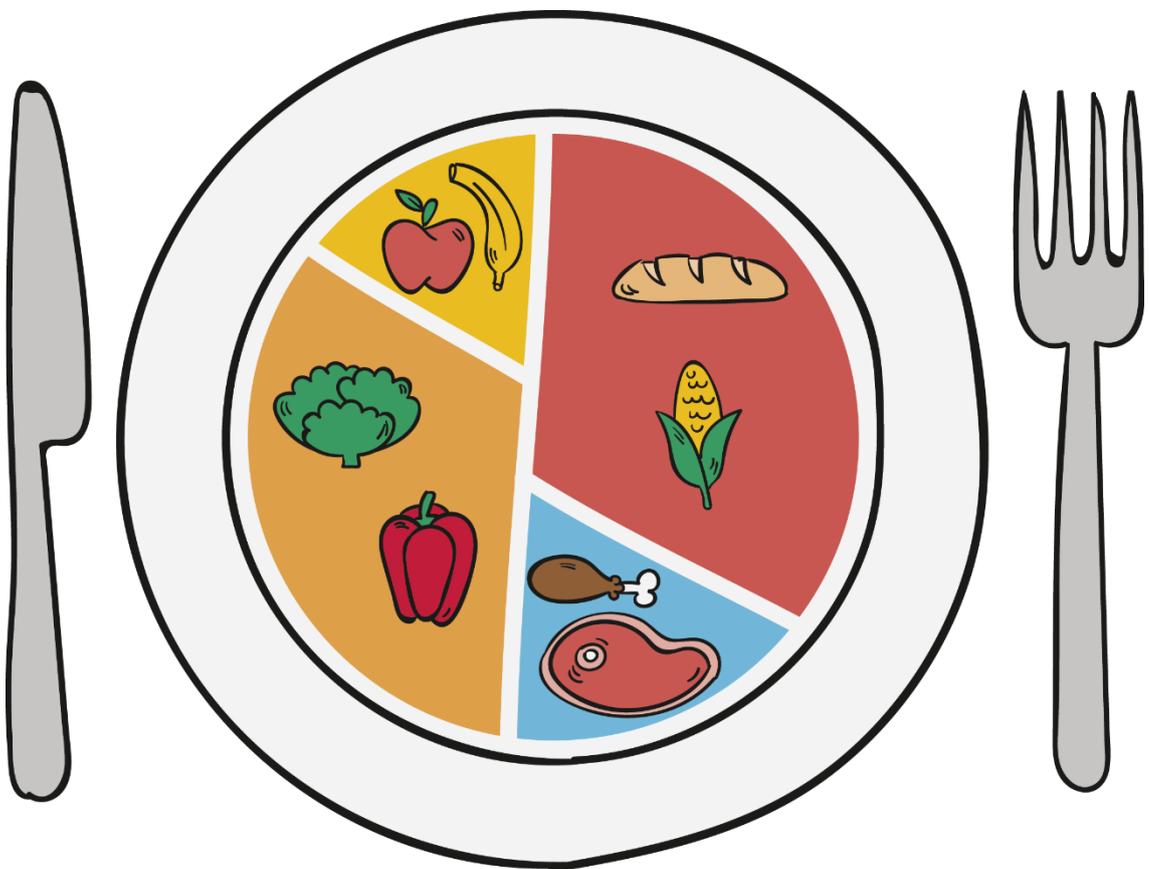
Se preparem, porque no final vocês irão compartilhar suas estratégias de solução com os outros grupos.

AUTOAVALIAÇÃO

Como você avalia essa atividade? Escreva algumas palavras sobre se você gostou, se você aprendeu, enfim, suas impressões e considerações sobre esse trabalho e sobre sua participação nele.

MONTANDO UM PRATO COM NÚMEROS

NUTRIÇÃO E SAÚDE NA
JUVENTUDE: COMO MONTAR UM
PRATO SAUDÁVEL CALCULANDO
AS QUANTIDADES IDEAIS DE CADA
ALIMENTO?





GUIA DO PROFESSOR



PROBLEMATIZAÇÃO:

Na Modelagem Matemática o ponto crucial é delimitação do problema e a busca por encontrar algumas respostas a ela, utilizando a matemática como instrumento. Assim encontramos no tema de nutrição uma possibilidade de investigação matemática na determinação de uma dieta equilibrada.

Elaboramos essa proposta, com vistas na possibilidade de envolver o estudo dos conteúdos de matrizes e sistemas lineares. A atividade se mostrou muito viável e eficaz por conseguir integrar todos esses conteúdos em uma única situação-problema delimitada a partir de um assunto da vida dos alunos:

Sabendo o total de carboidratos, proteínas e lipídeos recomendados para a refeição principal do seu dia (almoço), é possível calcular quantas porções de três alimentos seriam as devidas para uma refeição balanceada?

POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS PARA A INVESTIGAÇÃO:

Nesta atividade, você poderá iniciar a aula apresentando aos alunos o texto Nutrição dos Jovens, disponível na folha do aluno, esse texto permitirá que se realize em sala um diálogo que promova a familiarização do tema. Nesse momento é importante conversar sobre os seguintes pontos: O que é carboidrato, proteína e lipídeo; quais alimentos eles mais consomem ao longo do dia; em quais dos três grupos alimentares acima eles se encaixam; e quais as funções desses alimentos no nosso organismo.

Sugira que façam uma pesquisa em casa e organizem em uma tabela as informações nutricionais dos alimentos que eles mais consomem na refeição principal. Nesse momento, as matrizes podem ser apresentadas como tabelas de dados, sem nenhum problema. Em seguida, incentive que encontrem também a quantidade média diária de carboidrato, proteína e lipídeo para um jovem com a idade deles e façam uma estimativa de qual seria essa quantidade para uma refeição principal.

Proponha uma investigação sobre a quantidade de porções necessárias para uma dieta equilibrada e aproveite esse momento para explicar o escalonamento como método de resolver sistemas lineares, porque ao matematizar o problema pode-se chegar a um sistema de equações lineares. Logo abaixo, você encontrará sugestões de vídeos e leituras que poderá utilizar como apoio durante a aplicação das atividades.

Sugestão de vídeo: Comendo Números: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073>

Sinopse: Um jovem esportista está fazendo o seu treino e se sente muito cansado. Fala então com a nutricionista do clube que lhe sugere uma dieta com quilocalorias, lipídios e proteínas suficientes para as atividades esportivas. Para determinar a quantidade por dia, de porções de alimentos que contenham cada um dos itens acima, ela monta um sistema

linear de 3 equações a 3 incógnitas. E para encontrar a solução eles usam o método de eliminação de Gauss.

Sugestão de leitura: Revista Adolescência e Saúde. Artigo: Nutrindo a saúde dos Adolescentes. Disponível em:

http://www.adolescenciaesaude.com/detalhe_artigo.asp?id=225

[O resumo desse artigo está disponibilizado na folha do aluno a seguir.](#)

PLANEJAMENTO DAS AULAS

Proposta: A partir de uma modelagem matemática relacionada a um plano alimentar, conduzir o aprendizado de sistemas lineares.

Eixo Temático: Números e Operações

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM:

- Modelar situações-problema em equações lineares.
- Tratar dados dispostos em tabelas e associá-los às matrizes.
- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações do cotidiano para a linguagem matemática.
- Resolver problemas determinando a solução de um sistema linear.

Conteúdo: Matrizes e Sistemas Lineares.

Conteúdos subjacentes: Tratamento da informação com uso de tabelas

Metodologia:

- Introduzir a atividade com o texto sobre nutrição de jovens. Leituras e comentários. (1 aula)
- Propor atividade de pesquisa sobre o valor nutricional dos alimentos consumidos pelos alunos. (Fazer em casa e socializar os resultados em uma aula)
- Suscitar nos alunos o interesse por elaborar um programa de dieta simplificada para eles próprios. Mostrar um vídeo da coleção Matemática Multimídia "Comendo Números" como exemplo da atividade. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073> (1 aula)
- Na oportunidade, explicar uma aplicação da multiplicação de matrizes e depois os métodos de resolução de sistemas lineares, ajudando os alunos a calcularem seu programa de dieta. (3 aulas)

Avaliação: A avaliação poderá ser feita por meio da observação da participação dos alunos em três fases:

1ª – a coleta e organização dos dados sobre o valor nutricional dos alimentos consumidos por eles. Elaboração da tabela.

2ª – atividade 1 disponível na folha do aluno. (Saber relacionar as tabelas às matrizes correspondentes e entender que a resolução do problema envolve multiplicação de matrizes).

3ª – atividade 3 disponível na folha do aluno. (Saber montar e resolver o sistema linear)

Importante: Não leve em conta apenas o conhecimento dos conteúdos matemáticos, avalie seu aluno também pelo desenvolvimento das atitudes de saber pesquisar, organizar os dados e refletir sobre os problemas do cotidiano.

Duração: 6 aulas de 50 minutos.

RECURSOS

Vídeos; Quadro e Giz; Folha de instrução da atividade e Calculadora



FOLHA DO ALUNO



NUTRIÇÃO E SAÚDE NA JUVENTUDE: COMO MONTAR UM PRATO SAUDÁVEL CALCULANDO AS QUANTIDADES IDEAIS DE CADA ALIMENTO?

Crescer e se alimentar implica estabelecer relações, fazer escolhas, identificar-se ou não com modelos e valores familiares ou de outras pessoas, adaptar-se bem ou mal aos padrões estabelecidos e conviver com hábitos, horários e diversos estilos de vida. Comer bem não é o mesmo que comer muito ou pouco. Cuidar do corpo que cresce é aprender a escolher melhor os alimentos para manter um equilíbrio nutricional entre ganhos e perdas calóricas.

Desequilíbrio no balanço entre a ingestão e o gasto de energia quando somos jovens causa impacto sobre a saúde e problemas como excesso ou perda de peso, desnutrição aguda e crônica, anorexia nervosa, bulimia nervosa, sobrepeso, obesidade, aterosclerose, hipertensão arterial e aumento do número de recém-nascidos de baixo peso em mães jovens.

Também devemos estar atentos na escolha do que comemos. Levar em consideração sempre os grupos alimentares e comer sempre um alimento de cada grupo. Os grupos são GRUPO DOS ALIMENTOS ENERGÉTICOS, GRUPO DOS ALIMENTOS CONSTRUTORES e GRUPO DOS ALIMENTOS REGULADORES.

Os alimentos energéticos são aqueles ricos em carboidratos, os construtores são os ricos em proteínas, ferro e cálcio e os reguladores são os ricos em fibras, vitaminas e sais minerais.

Os carboidratos têm função energética, garantindo o metabolismo e a temperatura corporal. São os glicídios, os açúcares e os amidos encontrados em cereais como trigo, milho e aveia, farinhas, arroz, pães e massas, vegetais e frutas, que deve constituir 50% a 55% das calorias totais.

As proteínas possuem função plástica, possibilitando o crescimento e o desenvolvimento essenciais do organismo, incluindo a regeneração dos tecidos. As principais fontes de proteínas animais e vegetais, como carnes, aves, peixes, leite, soja, grãos e sementes, leguminosas e cereais, devem fornecer 20% a 25% das calorias totais.

NECESSIDADES PROTÉICAS CONFORME IDADE E SEXO

Idade (anos)	Aportes diários de proteínas (g/cm)
Meninos	
11-14	0,29
15-18	0,34
19-24	0,33
Meninas	
11-14	0,29
15-18	0,28
19-24	0,27

Os lipídeos têm função calórica essencial exercida pelas gorduras saturadas e não-saturadas que se encontram em óleos, azeite, manteiga, margarina, banha, toucinho, linguiças, cremes, molhos, frituras, maionese e que devem contribuir com 20% a 30% das calorias totais.

Não existe dieta-padrão que sirva para todos. Importante é adequar todos os grupos de nutrientes para as diferentes etapas da vida, e, de acordo com as atividades diárias e os diversos estilos de vida, dividir em três refeições e dois lanches ao dia, balanceando as ingestões e os gastos diários, sem exageros nos fins de semana.

A juventude em si é uma fase de transição e de busca de novos padrões e alternativas de vida. Por isso mesmo é também a melhor época para se realçar e investir em programas de prevenção e educação em saúde para multiplicar novos hábitos alimentares entre os jovens, pois eles são os melhores promotores das mudanças sociais numa comunidade.

Fonte: Artigo Nutrindo a saúde dos adolescentes. Evelyn Eisenstein e Simone Cortes Coelho, Revista Adolescência e Saúde. Reflexão



REFLEXÃO

Como um exercício para tomar consciência da sua alimentação do dia a dia, reflita sobre os alimentos mais consumidos por você em quantidade e frequência. Depois com base nos seus conhecimentos prévios escreva em qual grupo alimentar eles se encaixam, se é predominantemente carboidrato, proteína ou lipídeo.

Reflita e discuta com seus colegas sobre qual a importância e principais funções dos carboidratos, das proteínas e dos lipídeos para o nosso corpo?



PESQUISA

Pesquise a composição dos alimentos e a quantidade de carboidrato, calorias, proteínas, lipídeos dos cinco principais alimentos que vocês mais consomem.

Tratamento da Informação: Organize numa tabela as informações pesquisadas considerando porções de 100g de cada alimento.



ATIVIDADES

1. Considerando que você faça uma refeição com as quantidades de 1, 2 e 3 porções de 3 dos alimentos escolhidos por você, qual seria o total de carboidratos, proteínas e lipídeos consumida nessa refeição? (Organize esses dados em tabelas. *Aqui poderemos trabalhar com os conceitos de matrizes e multiplicação de matrizes*).
2. Sabendo que para a refeição principal do seu dia (almoço) o total de carboidratos, proteínas e lipídeos recomendado é o exposto na tabela abaixo, calcule quantas porções seriam as devidas para uma refeição balanceada. *Aqui poderemos trabalhar com os conceitos de matrizes associadas a sistemas lineares e resolução dos sistemas. Sendo possível introduzir também os determinantes como recurso para a resolução*.

AUTOAVALIAÇÃO

Como você avalia essa atividade? Escreva algumas palavras sobre se você gostou, se você aprendeu, enfim, suas impressões e considerações sobre esse trabalho e sobre sua participação nele.

TRIGONOMETRIA MEDINDO ALTURAS INACESSÍVEIS

CONHECENDO UMA TRILHA
ECOLÓGICA: NO QUE A
TRIGONOMETRIA PODERÁ
NOS AJUDAR?





GUIA DO PROFESSOR



PROBLEMATIZAÇÃO

A matemática vista de forma apenas formal, muitas vezes desligada da realidade e sem reforçar sua aplicabilidade, torna-se para os alunos pesada e muitas vezes temida. Por isso o interesse de oportunizar aos alunos essa experiência, num espaço não formal de aprendizagem, vivenciar uma atividade investigativa com procedimentos de pesquisa e modelagem tentando resolver a seguinte situação:

Representar matematicamente uma trilha ecológica ou qualquer outra área externa, utilizando para isso apenas fita métrica e transferidor. Expor os dados recolhidos em uma planta da trilha, em um relatório ou ainda em maquetes.

POSSÍVEIS ENCAMINHAMENTOS PARA A INVESTIGAÇÃO:

Para essa atividade, professor, você poderá inicialmente ensinar os alunos a construir um teodolito caseiro, utilizando apenas barbante e transferidor. Para isso, dê uma olhadinha no Portal do Professor e o que sugere para essa construção (<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635>).

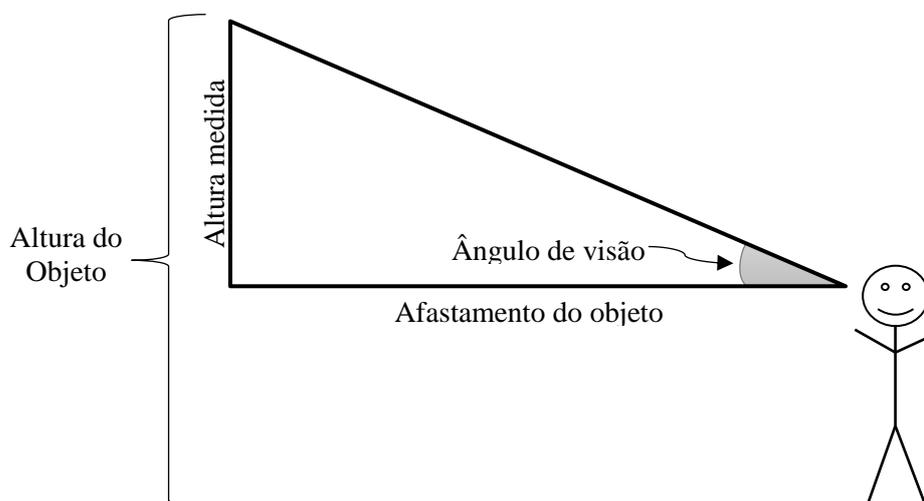


Figura 1 – Usando o teodolito e fita métrica para coletar dados numa trilha ecológica
Fonte: Acervo pessoal dos autores

Você poderá também visitar uma trilha ecológica que tenha na sua cidade ou mesmo qualquer área externa a escola buscando recolher informações que sirvam de dados para trabalhar trigonometria no triângulo. Após coletar todos os dados e retornarem à sala de aula com todas as variáveis ali observadas, você terá a oportunidade de

apresentar os conceitos das razões trigonométricas aos alunos, para que vejam como o conteúdo pode ser utilizado como um método para a resolução de problemas do cotidiano.

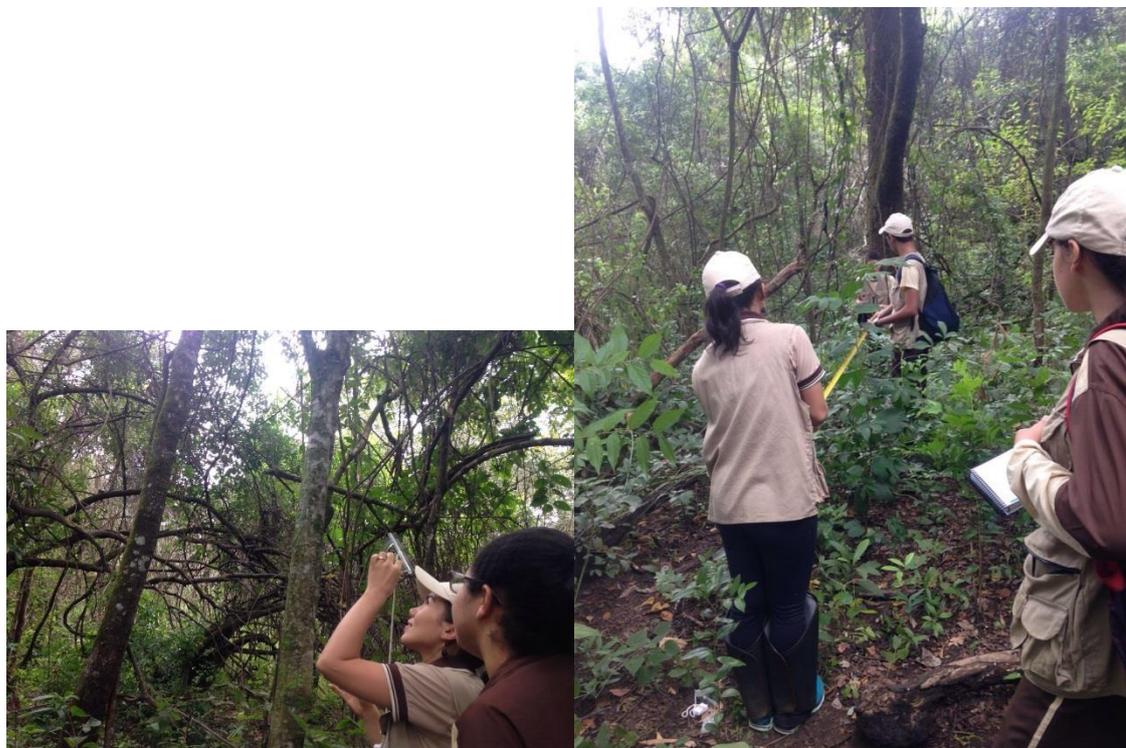


Figura 2 – Usando o teodolito e fita métrica para coletar dados numa trilha ecológica

Fonte: Acervo pessoal dos autores

Trabalhe com os alunos a confecção de uma planta que represente o local visitado, ou a produção de um relatório ou até mesmo a elaboração de uma maquete, após a visita, para expressar e significar o conteúdo de trigonometria aprendido. Acompanhe-os na resolução das atividades propostas no material do aluno e para a avaliação dos alunos, considere toda a participação em cada uma das quatro etapas da atividade.

PLANEJAMENTO DAS AULAS

Proposta: Conhecer uma trilha ecológica a partir de medidas e noções de trigonometria.

Eixo Temático: Espaço e Forma

Expectativas de Aprendizagem:

- Reconhecer a presença do uso da trigonometria no dia-a-dia a partir de uma investigação matemática com medidas e cálculos.
- Valorizar os conhecimentos da trigonometria, reconhecendo-os como necessários na vida cotidiana.
- Interpretar e modelar situações-problema, traçando estratégias de resolução e utilizando conhecimentos matemáticos simples, como medidas e proporções.
- Identificar as razões trigonométricas como ferramentas para facilitar medições.
- Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.

Conteúdo: Razões trigonométricas

Conteúdos subjacentes: Unidades de medida e proporções

- Apresentação do tema, e da programação de visitação à trilha (1 aula)
- Diálogo para decidir o foco de investigação matemática da trilha, nessa oportunidade os alunos poderão escolher o que desejam investigar. Elementos tais como: alturas médias das árvores de cada parte da trilha; nível de declive do solo; ângulo dos galhos das árvores; largura do rio. (1 aula)
- Aula prática para conhecer o teodolito como instrumento de medida de ângulos e construir um caseiro utilizando transferidor e barbante. (2 aulas)
- Ida a campo com foco nos itens de investigação escolhidos. Nesse momento os alunos irão fazer a coleta de dados para estudar matematicamente os itens observados. (4 aulas)
- Manipulação dos dados recolhidos com auxílio do professor. Momento em que ele irá apresentar o conteúdo matemático próprio para cada situação. Nos casos de medida de árvore, poderá explicar sobre razão trigonométrica tangente de um ângulo. (4 aulas)
- Culminância da investigação com um relatório ou planta da trilha, ou ainda, uma maquete. Momento em que utilizarão os cálculos realizados para preparar o material de apresentação. Oportunidade também de relembrar e trabalhar tópicos matemáticos como unidades de medida e proporções. (2 aulas)

Avaliação: Por se tratar de uma atividade longa, a avaliação deverá ser feita durante toda a atividade. Destacamos alguns itens de observação da aprendizagem dos alunos em quatro fases.

1ª fase – participação na delimitação do problema e levantamento de hipóteses sobre a investigação matemática da trilha.

2ª fase– coleta dos dados com as medições usando o teodolito e fita métrica. Registro dos dados.

3ª – planejamento da construção da maquete com a resolução do problema sobre calcular a altura das árvores ou dos portais. Socialização do processo de resolução.

4ª – construção da maquete e divulgação dos seus resultados.

Duração: 14 aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS

- Quadro e Giz
- Folha de instruções da atividade
- Transferidores e barbante
- Transporte para ida a campo
- Fita métrica e calculadora
- Lanche



FOLHA DO ALUNO



CONHECENDO UMA TRILHA ECOLÓGICA: NO QUE A TRIGONOMETRIA PODERÁ NOS AJUDAR?

O Cerrado possui a mais rica flora dentre todas as savanas do mundo, apresenta uma grande riqueza de espécies de aves, peixes, répteis, anfíbios e insetos, embora a riqueza de mamíferos seja relativamente pequena. É o segundo maior bioma brasileiro, sendo uma das regiões de maior biodiversidade do planeta. O bioma apresenta um mosaico de vários tipos de vegetação, savanas, matas, campos, áreas úmidas e matas de galeria etc. Essa diversidade de formações vegetais (fitofisionomias) é resultante da diversidade de solos, de topografia e de climas⁷.

A vegetação predominante do bioma Cerrado é formada por um mosaico heterogêneo de fitofisionomias vegetais. São quatro tipos principais (conhecidas como cerrado sensu lato): - Campo limpo: fisionomia com a mais alta cobertura de gramínea. - Campo sujo: apresenta alta cobertura de gramíneas e uma baixa cobertura de arbustos. - Cerrado *stricto sensu*: apresenta menor cobertura de gramíneas, e uma maior cobertura arbustivo-arbórea. - Cerradão: é uma formação florestal que apresenta ausência de cobertura de gramíneas e a maior cobertura arbórea. As formações florestais possuem espécies arbóreas, formando um dossel contínuo incluem: mata seca; as matas ciliares e matas de galeria. Estas formações apresentam alta umidade e baixas temperaturas e intensidade luminosa, quando comparadas às demais fitofisionomias.

Fonte: Proposta de uma sequência didática para o ensino da biodiversidade do bioma cerrado no ensino fundamental. Patrícia Spinassé Borges. Produto Educacional apresentado para fins de Defesa junto ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Goiás.



REFLEXÃO

Em visita a uma trilha ecológica, conhecendo e observando seu percurso e suas formações vegetais onde poderíamos encontrar a presença da matemática?

⁷ Sugestão de leitura: www.portaldocerrado.ueg.br



PESQUISA

Você sabe como se pode medir as árvores da trilha? E como medir a extensão do córrego? Pesquise e discuta com seu professor antes de partirmos para a visita.



ATIVIDADES

3. Com a ajuda de seu professor construa um teodolito caseiro que o ajudará a recolher os dados matemáticos da trilha.
4. Com fita métrica, sua caderneta de anotações e o teodolito caseiro recolha dados "matemáticos" do trecho da trilha que seu grupo irá analisar. Conte com a ajuda de seu professor, ele te indicará pontos importantes de observação e registro.
5. Não esqueça de tirar fotografias para auxiliar no desenvolvimento das atividades em sala de aula.
6. Em sala, faça um plano de trabalho para definir como irá mostrar o trecho analisado a partir da maquete. Não esqueça que será necessário representar proporcionalmente os elementos que irá constar na sua maquete.
7. Converse com seu professor para ele te ajudar a manipular os dados coletados. Esse será o momento de aprender os conceitos matemáticos que permitirão explorar os dados e calcular, por exemplo, a altura das árvores grandes, dos portais presentes no percurso da trilha, assim como a inclinação da escada e a largura do córrego.
8. Deixe os seus cálculos registrados na sua caderneta.



DISCUSSÃO

Se preparem porque no final da atividade vocês farão uma exposição da maquete e uma apresentação para toda a sala dos aspectos matemáticos envolvidos na atividade e aprendidos ao longo da realização da mesma.

AUTOAVALIAÇÃO

Como você avalia essa atividade? Escreva algumas palavras sobre se você gostou, se você aprendeu, enfim, suas impressões e considerações sobre esse trabalho e sobre sua participação nele.
